

Función Gamma: Propriedades Clásicas e Introducción a su Dinâmica

Pablo Diaz
Rafael Labarca





Función Gamma: Propriedades Clásicas e Introducción a su Dinâmica

Pablo Diaz
Rafael Labarca

Función Gamma: Propriedades Clásicas e Introducción a su Dinâmica

ISBN 978-85-244-0428-3
MSC (2010) Primary: 33B15, Secondary: 37B40, 37D05, 37E05, 37E15, 37M99

Produção Books in Bytes

Capa Sergio Vaz

Realização da Editora do IMPA
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ

Telefones: (21) 2529-5005
2529-5276
www.impa.br
ddic@impa.br

Índice general

1 Función Gamma **1**
1.1 Antecedentes Históricos 1
1.2 Propiedades de la Función Gamma 6
1.2.1 Funciones Log-Convexas 11
1.2.2 Representaciones de la Función Gamma 18
1.2.3 Función Beta de Euler 24
1.2.4 Fórmula de Reflexión 26
1.2.5 Aproximación de Stirling–De Moivre 33
1.2.6 Fórmula de Multiplicación de Gauss 41
1.2.7 Función Digamma 43
1.2.8 Función Polygamma 55
1.2.9 Función Gamma en el Plano Complejo 58
1.2.10 La Función Gamma Incompleta 60
1.3 Aplicaciones de la Función Gamma 62
1.3.1 Para el Cálculo de Integrales 62
1.3.2 Volumen y Área de una Bola y una Esfera en Dimensión n 64
1.3.3 Distribuciones en Probabilidad y Estadística 68
1.3.4 La Función Gamma en Soluciones de Ecuaciones Diferenciales . . 77
1.3.5 Aplicaciones en el Campo de la Física 78

2 Sistemas Dinámicos **83**
2.1 Introducción 83
2.2 Previos 84
2.3 Resultados importantes de la Función Gamma 90
2.3.1 Punto de Mínimo de la función Gamma para $x > 0$ 90
2.3.2 Puntos Fijos de la Función Gamma en el semi eje positivo 93

2.3.3 Soluciones de la Ecuación $\Gamma(x) = -2$ 96
2.4 La Entropía Topológica 106
2.4.1 La definición de Adler-Konheim y Mc Andrews 106
2.4.2 Cálculo de la Entropía en Espacios Métricos 113
2.4.3 Extensión de la definición de entropía a espacios no compactos . . 115
2.4.4 Entropía topológica e hiperbolicidad en la Función Gamma 117

3 Ejercicios **130**
3.1 Representaciones 130
3.2 Función Beta 138
3.3 Constante de Euler-Mascheroni 145
3.4 Función Digamma y Polygamma 147
3.5 Función Gamma incompleta 155
3.6 Función Gamma en los números complejos 158

A Puntos máximos y/o mínimos de la función gamma **167**
A.1 Método I 167
A.2 Método II 170
A.3 Método III 172

B Números de Bernoulli **175**
B.1 Polinomios de Bernoulli 178

Prefacio

¿Cómo es que llegamos a que en el XXXII Colóquio Brasileiro de Matemática haya un curso (y un texto) como éste?.

Interesante pregunta cuya respuesta pasamos a detallar. Esta respuesta puede, cómo no, ser tomada como un ejemplo del llamado *efecto mariposa* en lo social.

Por allá por el año 2015 dos estudiantes de pedagogía en matemáticas que estaban iniciando sus estudios de magister en matemáticas (Pablo Díaz y Juan Vivanco) se pusieron de acuerdo con un profesor (Rafael Labarca) para estudiar, semanalmente, algunas materias básicas para la formación de un matemático.

Las asignaturas básicas que se debería cursar en dicha formación incluyen: álgebra lineal; álgebra exterior; teoría de grupos; estructuras algebraicas; cálculo de una y varias variables; variable compleja; análisis real; espacios métricos; topología; análisis abstracto; teoría de integración; ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales; elementos de probabilidad e inferencia estadística; Cálculo numérico; Fundamento de la matemática; Geometría diferencial; análisis geométrico; otras geometrías; cálculo de variaciones; elementos de sistemas dinámicos, entre otras.

Habiendo tanta posibilidad debieron elegir. Se pusieron de acuerdo e iniciaron con un repaso de cálculo diferencial e integral de una variable real; siguieron con métodos de cálculo para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. En este estudio aparecieron, naturalmente, las funciones Gamma y Beta. En este punto los tres percibieron que eran muy pocas las demostraciones asociadas a las propiedades de la función Gamma y surgió, naturalmente, la idea de realizar las demostraciones de varias de estas propiedades.

Luego, siguieron con elementos de sistemas dinámicos y, por ahí, nació la idea de estudiar la dinámica de la función Gamma. Para esa fecha Pablo Díaz estaba completando los cursos básicos del programa de magister en ciencia en la especialidad de matemática en la Universidad de Santiago de Chile y, cómo no, la propuesta del profesor fue empezar a entender la dinámica de la función Gamma. A fin de saber si este tema había ya sido estudiado contactó a colegas del área de sistemas dinámicos en Brasil, Francia, Estados

Unidos y México; para saber si esto ya había sido estudiado y, sorpresa, no había sido estudiado y, por ello, empezaron dicho estudio.

Al Iniciar el trabajo para la tesis (alumno Pablo Díaz; guía Rafael Labarca) quedó claro que lo que se quería era escribir un texto que tuviera dos partes: en una de ellas se desarrollarían diversas propiedades clásicas de la función Gamma y en la segunda parte se estudiaría la dinámica de dicha función.

Es claro que todo el material que se quería desarrollar excede lo que se pretende con una tesis de magister pero, igual se hizo. Parte de ese material constituyó la tesis de magister de Pablo y la base de un trabajo original, firmado por Díaz y Labarca, que se pretende publicar en una revista matemática.

Este material se completó el segundo semestre de 2018 y, para esa fecha, la organización del Coloquio Brasilero de Matemática hizo un llamado público para presentar propuestas de cursos introductorios y avanzados para el XXXII Coloquio. Se hizo la propuesta de curso introductorio y, nueva sorpresa, fue aceptada.

Entendemos que el comité científico aceptó la propuesta porque revisita un *tema antiguo (la función Gama)* utilizando una *visión moderna (desde la perspectiva de los sistemas dinámicos)*.

Eso; humm, y,..... ¿dónde entra aquí esto del efecto mariposa?. El efecto mariposa se explica aquí cuando vemos que un genuino interés por saber matemática de tres personas en algún lugar lleva, a lo largo de un par de años, a concluir un libro que, esperamos, resulte entretenido para muchos otros aprendices de matemáticos y/o estudiantes de ciencia y tecnología en toda la América Latina.

También, estamos seguros que en el texto hay más de algún error y, con seguridad, algunas demostraciones podrían haber sido más cortas o más elegantes. Por eso, y para quienes estudien el texto, les dejamos nuestros correos electrónicos (pablo.diaz@usach.cl y rafael.labarca@usach.cl) para que tengan la gentileza de permitirnos progresar en una mejor versión del mismo ya que, como no, podemos soñar con una segunda versión.

Para finalizar, y como una manera de recordar a uno de los pioneros en la investigación en matemática en el Brasil y fundador del Coloquio Brasilero de Matemática, dedicamos este libro al Profesor Dr. Mauricio Matos Peixoto, recientemente fallecido en Río de Janeiro.

Pablo Díaz y Rafael Labarca.
San Carlos- Brasil y Santiago de Chile, Mayo de 2019.

Introducción

Todo indica, ver las referencias Davis (1959) y Fuss (1843), que la función Gamma tendría su origen en un intercambio epistolar entre dos destacados matemáticos del siglo XVIII, los que se correspondían con la idea de resolver el problema de extender la función factorial, definida para números naturales, a números no naturales.

Introducimos, de esta forma, el estudio de la función Gamma que se desarrolla, a lo largo de tiempo, con contribuciones de una amplia gama de matemáticos que han trabajado, diversas veces, de manera colaborativa. En los inicios, muchas de sus propiedades se obtienen usando una variada gama de técnicas e ideas matemáticas como series, límites, derivadas e integrales; que eran la frontera del conocimiento en la época.

Si el lector piensa, por el hecho de que el estudio de la función Gamma tiene ya casi 300 años, que no hay nada nuevo que ver, está equivocado pues la dinámica de la función Gamma no ha sido objeto de estudio.

Este trabajo contiene, básicamente, dos capítulos que se refieren a la función Gamma:

$$\Gamma : \mathbb{R} - \{0, -1 - 2, \ldots\} \to \mathbb{R} - \{0\} \text{ definida por } \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

En el primer capítulo establecemos diversas propiedades y resultados de esta función como: sus diferentes representaciones, la aproximación de Stirling–De Moivre, la fórmula de reflexión y algunas funciones que se derivan de la función Gamma (en especial la función digamma).

En el segundo capítulo, nos centramos en el estudio de la dinámica de la función Gamma. Para ello, lo primero será verificar que para $x > 0$ hay dos puntos fijos, a saber $x = 1$ y $x \approx 3,5623828215736$; y un punto de mínimo; a saber $x_0 = 1,4613361518823$ con $\Gamma(x_0) = 0.8855226070359$. Luego, probaremos que el punto fijo $x = 1$ es de tipo atractor y que el punto fijo $x \approx 3,5623828215736$ es de tipo repulsor. La dinámica para $x > 0$

resulta ser bastante simple: o la órbita es atraída para el punto atractor o es atraída por el punto al infinito.

La riqueza de la dinámica de la función Gamma se encuentra en $x < 0$: En particular nos interesa el conjunto de valores negativos cuya imagen $\Gamma(x) < 0$. Estos valores se encuentran en los intervalos de la forma: $]-2k-1, -2k[\,, k \in \mathbb{N}$. En el interior de estos intervalos consideraremos los subintervalos $J_k = \left[-x_2^k, -x_1^k\right]$ e $I_k = \left[-y_2^k, -y_1^k\right]$, donde los extremos satisfacen:

$$\Gamma(-x_2^k) = \Gamma(-y_1^k) = -2k-1,\ \Gamma(-x_1^k) = \Gamma(-y_1^k) = -2;$$

y para los que podemos probar que $|\Gamma'(z)| \geqslant \lambda > 1$; para $k \in \mathbb{N}$ y $z \in J_k \cup I_k$. Con esto concluiremos que el conjunto maximal invariante $\Lambda_n = \bigcap_{j=0}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{n} L_i\right)$, con $L_i = J_i \cup I_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$; es hiperbólico y tiene una dinámica topológicamente equivalente a la dinámica del shift de $2n$ símbolos. De hecho, la biyección que hace la conjugación topológica se define desde Λ_n hacia el conjunto de sucesiones: $\Sigma_{2n} = \{\theta : \mathbb{N}_0 \to \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Esto es, asociado con cada $z \in \Lambda_n$ tenemos la sucesión:

$$\theta(z) \in \Sigma_{2n} \quad \text{definida por} \quad \theta(z)(i) = j \iff \Gamma^i(z) \in L_j$$

esto define la aplicación $z \to \theta(z)$ que resulta ser una biyección de Λ_n en Σ_{2n}. Esta biyección nos permite definir una topología en Σ_{2n} por :$A \subset \Sigma_{2n}$ es abierto si y sólo si $\theta^{-1}(A) \subset \Lambda_n$ es un abierto.

En Σ_{2n} consideramos el shift $\sigma : \Sigma_{2n} \to \Sigma_{2n}$ definido por $\sigma(\theta)(i) = \theta_{i+1}$, esto es $\sigma(\theta_0, \theta_1, \ldots) = (\theta_1, \theta_2, \ldots)$, cuya entropía topológica es igual a $\log(2n)$, es decir, $h_{top}(\sigma) = \log(2n)$ Labarca (2011). Probaremos que $\theta : \Lambda_n \to \Sigma_{2n}$ es una conjugación topológica entre $\Gamma|_{\Lambda_n} : \Lambda_n \to \Lambda_n$ y $\sigma : \Sigma_{2n} \to \Sigma_{2n}$ (esto es $\sigma \circ \theta = \theta \circ \Gamma|_{\Lambda_n}$), con lo que concluíremos que $h_{top}(\Gamma|_{\Lambda_n}) = \log(2n)$. Cómo consecuencia tendremos que la entropía topológica de Γ es infinita.

1 Función Gamma

1.1 Antecedentes Históricos

De acuerdo a lo que señala P. H. Fuss, en Fuss (1843), el surgimiento de la función Gamma, se remontería a un intercambio de cartas entre dos grandes matemáticos del siglo XVIII. El primero de ellos fue nada menos que Leonhard Euler (1707–1783), que a la sazón tenía 22 años de edad y ya se había convertido en un gran matemático. El segundo, menos conocido y mayor en edad, era Christian Goldbach (1690–1764) que a la fecha era secretario de la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

La función Gamma habría surgido de la intersección de dos desarrollos matemáticos. El primero era el problema de interpolación, que se había hecho muy popular durante el siglo XVIII . El segundo era el cálculo integral.

Goldbach considero el problema de la interpolación de los números factoriales $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, \ldots$..... Es decir, definir (o encontrar) una función que diera sentido, por ejemplo, al factorial de $\frac{5}{2}$; o sea definir la cantidad $\left(\frac{5}{2}\right)!$, como un valor numérico.

En una carta de Daniel Bernoulli (1700–1782) a Goldbach, fechada el 06 de Octubre de 1729 y escrita en San Petersburgo, Fuss (ibíd.) tomo II, le propuso la siguiente expresión:

$$\left(A + \frac{x}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{1+x} \cdot \frac{3}{2+x} \cdot \frac{4}{3+x} \cdots \frac{A}{A-1+x}\right)$$

como una interpolación del factorial de un número, donde la precisión del resultado aumenta mientras A sea más grande. Por ejemplo para $x = 4$ y $A = 6$ tenemos que la expresión nos da el vaor $24,\overline{380952}$ para el factorial de 4. (En la carta Bernoulli calcula el valor de la expresión con $A = 8$ y $x = \frac{3}{2}$).

Por esa fecha Euler desarrollaba independientemente su propia representación del factorial de un número, y animado por la expresión de Bernoulli, le escribió una carta a Goldbach (Davis (1959) tomo I) en la cual representaba los $n-$términos de la sucesión $1, 2, 6, 24, \ldots$ por el producto:

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}\right] \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{n+2}\right] \cdot \left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{3}{n+3}\right] \cdots = n!.$$

Euler afirmó que su producto convergía en el infinito, es decir, mientras más términos había, entonces el valor de esta expresión se aproximaba a $n!$. Aún cuando los productos de Euler y Bernoulli son diferentes, ambos convergen al mismo número en el infinito, y se verificó que la fórmula dada por Bernoulli converge más rápido.

Entretanto, y en la carta enviada por Euler a Goldbach, no entregaba mayores detalles sobre la interpolación del factorial de un número. Sin embargo, y un año más tarde en 1730, Euler entregó más detalles en su articulo Euler (1738), titulado "*De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*". En este articulo, Euler afirmó que este producto era 'maravillosamente adecuado para interpolar el factorial de un término, cuyos índices son fraccionarios', pero él tenia la intención de entregar métodos más convincentes que le proporcionaran valores exactos.

Este método alternativo daría como resultado una segunda interpolación, entregada en forma de una integral definida. El impulso para esta nueva dirección parece haber sido dada por el factorial de $\frac{1}{2}$. Euler, en su articulo, sustituyo $n = \frac{1}{2}$ en su producto, es decir, considero la expresión

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}\right] \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{n+2}\right] \cdot \left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{3}{n+3}\right] \cdots$$

que podemos escribir de la forma:

$$\frac{1 \cdot 2^n}{1+n} \cdot \frac{2^{1-n} \cdot 3^n}{2+n} \cdot \frac{3^{1-n} \cdot 4^n}{3+n} \cdot \frac{4^{1-n} \cdot 5^n}{4+n} \cdots;$$

entonces al reemplazar $n = \frac{1}{2}$ obtuvo:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{4}}{7} \cdot \frac{2\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}{9} \cdots$$

y ordenando cada término dentro de una raíz obtenemos la siguiente forma:

$$\sqrt{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 10}{9\cdot 9}\cdots}$$

y esta última relación ya había sido estudiada de forma indirecta por John Wallis (1616-1703). En su libro 'Arithmetica Infinitorum' de 1656 Davis (1959), Wallis había establecido que el área de una circunferencia con diámetro unitario podía ser expresado por el producto infinito

$$\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 10}{9\cdot 9}\cdots .$$

Por ello Euler concluyó (En el punto 2 de su articulo) que $(\frac{1}{2})!$ era igual a la raíz de esta área, estableciendo el resultado central: $(\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ahora bien, π aparece en el cálculo del área del círculo, y esta área significaba a su vez integrales, pero Euler ya estaba familiarizado con la integrales que exhibían el mismo fenómeno. Por lo tanto se le ocurrió buscar una transformación que le permitiera expresar su producto infinito en forma de integral. Para hacer esto usó una integral de la forma: $\int_0^1 x^e(1-x)^n dx$.

Mencionamos que casos particulares de ésta integral habían sido considerados por Newton, Stirling y Wallis. Tomando n como un número entero y e un valor arbitrario (no es la constante e que conocemos hoy en día), Euler expandió $(1-x)^n$ en su forma binomial, y sin dificultad encontró que:

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx = \frac{1\cdot 2\cdots n}{(e+1)(e+2)\cdots(e+n+1)}.$$

La idea de Euler era aislar $1\cdot 2\cdots n$ del denominador para obtener una expresión para $n!$ en forma de integral.

Ahora seguiremos con la misma nomenclatura e ideas de Euler, marcando con un (*) las fórmulas que entrega en el articulo original. Él escribió la integral $\int_0^1$ como $\int$ y sustituyó e por $\frac{f}{g}$ y obtuvo:

$$\int_0^1 x^{\frac{f}{g}}(1-x)^n dx = \frac{g^{n+1}}{f+(n+1)g}\cdot\frac{1\cdot 2\cdots n}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)},$$

entonces:

$$\frac{1\cdot 2\cdots n}{(f+g)(f+2g)(f+ng)} = \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n. \tag{a*}$$

Él observó que podía aislar $1\cdot 2\cdots n$ si hacia $f = 1$ y $g = 0$ en la parte izquierda de esta igualdad, pero en ese caso, obtuvo en la parte derecha de la igualdad una forma indeterminada, la cual escribe extrañamente como:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{0}}dx(1-x)^n}{0^{n+1}}. \tag{b*}$$

Luego procedió a encontrar un valor para (b*). Primero hizo la sustitución $x = z^{\frac{g}{f+g}}$ en lugar de x y esto le dio :

$$dx = \frac{g}{f+g}z^{-\frac{f}{g+f}}dz \tag{c*}$$

reemplazando estos valores en la parte derecha de la igualdad en (a*) se convierte en:

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int \frac{g}{f+g}(1-z^{\frac{g}{f+g}})^n dz. \tag{d*}$$

esta expresión podemos reescribirla de la forma:

$$\frac{f+(n+1)g}{(f+g)^{n+1}}\int_0^1 \left(\frac{1-z^{\frac{g}{f+g}}}{g/(f+g)}\right)^n dz.$$

Una vez más, Euler probó con los valores $f = 1$ y $g = 0$ y obtuvo la forma indeterminada:

$$\int \frac{(1-z^0)^n}{0^n}dz. \tag{e*}$$

Ahora él considero la relación $G(t) = \dfrac{(1-z^t)}{t}$, y para valores cercanos a $t = 0$, derivo el denominador y el numerador, aplicando la regla de l'Hôpital y obtuvo:

$$\frac{-z^t dt lz}{dt} \tag{f*}$$

con $lz = \ln(z)$, entonces para $t = 0$ se obtiene $-lz$, por lo que:

$$\frac{(1-z^0)}{0} = -lz \tag{g*}$$

y:

$$\frac{(1-z^0)^n}{0^n} = (-lz)^n. \tag{h*}$$

Por lo tanto, Euler concluyó que:

$$n! = \int_0^1 (-\ln z)^n dz.$$

Con esto Euler obtuvo una expresión para $n!$, como una integral que se puede evaluar para valores distintos a números enteros. Observamos que la integral de la derecha es una integral recursiva que se calcula usando integración por partes.

Notamos que, en ese tiempo, ésta integral de Euler no era vista como una función en si misma (de la variable x), sino como una fórmula para obtener los valores de los factoriales de números no-naturales.

Fue Adrien-Marie Legendre (1752-1833) quien estableció el valor de la integral cómo la definición de una función. En efecto, en su 'Exercices de Calcul Intégral', Vol. 1 (1811) Legendre (2010), (páginas 339 a 343) Legendre realizó diversos cambios de variables para llegar a la integral:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{x-1} dt, \quad x > 0$$

que definió cómo $(x-1)!$; así y con la notación actual, la función Gamma había nacido. Haciendo el cambio de variable $u = \ln\left(\frac{1}{t}\right)$, obtenemos la representación tradicional y más conocida de la función Gamma, también conocida como la integral de Euler:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du \quad x > 0.$$

Legendre, utilizando la definición de la integral para la función Gamma probó que $\Gamma(1) = 1$ y la relación de recurrencia $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x!$ para $x > 0$.

De esta forma la función Gamma extiende el factorial de números naturales a todos los números reales positivos. Sin embargo, y durante casi 200 años de investigación de esta función surgieron las siguientes preguntas: ¿la función Gamma es única con estas propiedades?, ¿es la única forma de interpolar el factorial de un número no-entero?, las respuestas a estas preguntas llegaron bajo el concepto de convexidad.

Observação. Una función real $f(x)$ se dice convexa en el intervalo (a, b), si para todo $c \in (a, b)$ la recta tangente en c, al gráfico de f, esta por debajo del gráfico.

En, 1922, Harald Bohr (1887–1951) y Johannes Mollerup (1872–1937) demostraron que de todas las funciones, log-convexas, que extienden el factorial de un número real positivo, la función Gamma es la única que cumple con $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Observação. Una función $f(x)$ definida y positiva en un cierto intervalo se dice log-convexa si $\log(f(x))$ es una función convexa.

1.2 Propiedades de la Función Gamma

Definición 1.2.1. Para $x > 0$ se define la función Gamma como:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

De está definición de la función Gamma, podemos verificar que está bien definida para $x > 0$.

Proposición 1.2.1. *$\Gamma(x)$ está bien definida para todo $x > 0$.*

Prueba. Esto quiere decir que $\Gamma(x) \in \mathbb{R}$.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}dt = \underbrace{\int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t}dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}dt}_{I_2}.$$

I_1)
- Si $x \geqslant 1$, entonces I_1 es convergente puesto que su integrando es una función continua (y entonces integrable) en $[0, 1]$ (integral de Riemann).
- Si $0 < x < 1$ entonces, y para todo $t > 0$, tenemos la siguiente desigualdad: $0 < t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1}$. Por el criterio de comparación, si ocurre que la integral $\int_{0^+}^1 t^{x-1}dt$ converge, entonces I_1 converge. Ahora:

$$\int_{0^+}^1 t^{x-1}dt = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 t^{x-1}dt = \lim_{a\to 0^+} \left.\frac{t^x}{x}\right|_a^1 = \frac{1}{x},$$

por lo tanto, I_1 converge para cada $x > 0$.

I_2) Usando el criterio de comparación al límite con $g(t) = t^{-2}$ tenemos $\dfrac{f(t)}{g(t)} = \dfrac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{-2}} = t^{x+1}e^{-t}$, entonces

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$$

y como $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$ converge, la integral de $f(t)$ también converge, por lo tanto, I_2 converge.

□

Proposición 1.2.2. *La función Gamma satisface:* $\Gamma(1) = 1$.

Prueba. Fácil, solo hacer $x = 1$ en la definición 1.2.1. □

Proposición 1.2.3. *Si* $x > 1$*, entonces* $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$.

Prueba. Dado $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, integrando por partes, con $u = t^{x-1}$ y $dv = e^{-t}dt$, tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\int_0^a t^{x-1}e^{-t}dt &= \lim_{a\to\infty}(-t^{x-1}e^{-t})\Big|_0^a + \int_0^\infty (x-1)t^{x-2}e^{-t}dt \\ &= (x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}dt = (x-1)\Gamma(x-1),\end{aligned}$$

por lo tanto, $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1), \quad \forall x > 1$. □

Proposición 1.2.4. *Si* $x \in \mathbb{N}$*, entonces* $\Gamma(x) = (x-1)!$

Prueba. Usando la proposición anterior tenemos que $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$; aplicando nuevamente la proposición pero a $\Gamma(x-1)$ si $x-1 > 1$, tenemos $\Gamma(x-1) = (x-2)\Gamma(x-2)$. Sucesivamente, $\Gamma(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = (x-1)!$. □

Proposición 1.2.5. *Si* $x \geqslant 1$ *y* $x = [x] + r$ *dónde* $[x]$ *indica la parte entera de* x *y* $r \in [0,1]$*, entonces:* $\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-[x])\Gamma(r)$.

Prueba. Sabemos que $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$. Además, como $x \geqslant [x]$ con $0 \leqslant \underbrace{x-[x]}_{r} < 1$, entonces

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-[x])\Gamma(x-[x]) = (x-1)(x-2)\cdots(x-[x])\Gamma(r)$$

como señalado. □

Observação. El resultado anterior nos dice que basta con conocer los valores de la función Gamma en $]0,1[$ y multiplicarla por la expresión polinomial $(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ para conocer sus valores para x tal que $x \in]n, n+1[$.

Proposición 1.2.6. *Se cumple que:* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$*. (Integral de Gauss)*

Prueba. Sea $J = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, entonces

$$J\cdot J = \int_0^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

aplicando el Teorema de Fubini a la integral doble

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

tenemos

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy = J^2.$$

Ahora, usando el cambio de coordenadas $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, para calcular la integral doble, tenemos:

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \lim_{a\to\infty} \int_0^a r e^{-r^2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{a\to\infty} (-\frac{1}{2} e^{-r^2}) \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{\pi}{4}; \end{aligned}$$

luego, $J^2 = \dfrac{\pi}{4}$ y entonces: $J = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Por tanto: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. □

Observação. Mediante el cambio de variable $t = y^2$ en la definición 1.2.1 se tiene que:

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty y^{2x-1} e^{-y^2} dy.$$

Proposición 1.2.7. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Prueba. De la observación obtenemos que
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy$ y usando la proposición 1.2.6 tenemos que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
y, por tanto: $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$. □

Como consecuencia tenemos:

Proposición 1.2.8. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Prueba. Usando la proposición 1.2.3 tenemos que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, entonces podemos reescribir $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ de la forma
$\Gamma\left(n - 1 + \frac{1}{2} + 1\right) = \left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)$, pero a su vez

$\Gamma\left(n-1+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(n-2+\frac{1}{2}+1\right)$ y así usamos esto $n-$veces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n-1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n-1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi},
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi};\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

□

Generalizando esta última proposición se obtiene la siguiente:

Proposición 1.2.9. *Para todo* $n, p, k \in \mathbb{N}$*, se cumple* $\Gamma\left(n+\frac{p}{k}\right)=\frac{[(n-1)k+p]\cdot[(n-2)k+}{k^n}$

Prueba. Para demostrar esto, usaremos la proposición 1.2.3, es decir, podemos reescribir $\Gamma\left(n+\frac{p}{k}\right)$ de la forma $\Gamma\left(n-1+\frac{p}{k}+1\right)$, entonces $\Gamma\left(n-1+\frac{p}{k}+1\right)=\left(n-1+\frac{p}{k}\right)\Gamma\,($ pero a su vez $\Gamma\left(n-1+\frac{p}{k}\right)=\Gamma\left(n-2+\frac{p}{k}+1\right)$ y así usamos esto $n-$veces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{p}{k}\right) &= \left(n-1+\frac{p}{k}\right)\Gamma\left(n-1+\frac{p}{k}\right)\\
&= \left(n-1+\frac{p}{k}\right)\cdot\left(n-2+\frac{p}{k}\right)\Gamma\left(n-2+\frac{p}{k}\right)\\
&\ \ \vdots\\
&= \left(n-1+\frac{p}{k}\right)\cdot\left(n-2+\frac{p}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{p}{k}\right)\left(\frac{p}{k}\right)\Gamma\left(\frac{p}{k}\right),
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\Gamma\left(n+\frac{p}{k}\right)=\frac{[(n-1)k+p]\cdot[(n-2)k+p]\cdots[k+p]\cdot p}{k^n}\Gamma\left(\frac{p}{k}\right)$$

para todo $n, p, k \in \mathbb{N}$. □

Veamos ahora cómo extender la función Gamma a los números negativos. Para ello,

aplicamos la proposición 1.2.3 y obtenemos la relación: $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$.

Ejemplo 1.2.1. Para $x = -\frac{1}{2}$ tenemos:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

Iterando este proceso para $x < 0$, $x \neq -1, -2, -3, \ldots$ tenemos la siguiente:

Definición 1.2.2. Para cada x tal que $-n < x < -n+1, n \in \mathbb{N}$ se define

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

De la proposición 1.2.3 tenemos la siguiente:

Proposición 1.2.10. $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

Prueba. Tenemos que $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x+1)}{\lim\limits_{x\to 0^+} x} = +\infty.$$

□

Obtenemos ahora el siguiente resultado:

Proposición 1.2.11. $\lim\limits_{x\to 0^-} \Gamma(x) = -\infty$

Prueba. De la definición 1.2.2, con $n = 1$, tenemos que $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, entonces:

$$\lim_{x\to 0^-} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^-} \Gamma(x+1)}{\lim\limits_{x\to 0^-} x} = -\infty.$$

□

Otra de las consecuencias de la definición 1.2.2 es que $\Gamma(n) \to \pm\infty$ para valores enteros negativos y que el signo de $\Gamma(x)$ en el intervalo $-n < x < -n+1, n \in \mathbb{N}$ será $(-1)^n$ y por tanto la gráfica de la función Gamma para $x \in (\mathbb{R}/(0, -1, -2, -3, \ldots))$ será de la forma:

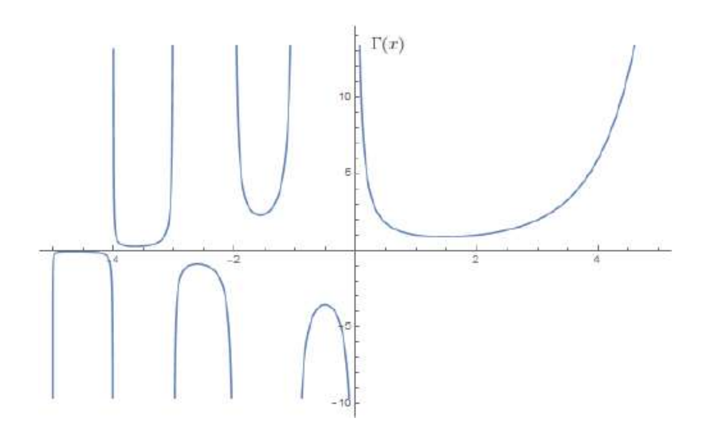


Figura 1.1: Gráfico de la Función Gamma

1.2.1 Funciones Log-Convexas

En esta sección probaremos la unicidad de la función Gamma en el conjunto de funciones log-convexas. Esto es, veremos que si una función satisface las propiedades señaladas en las proposiciones 1.2.2 y 1.2.3 y además es log-convexa, entonces coincide con la función Gamma. Para ello, definiremos este concepto y presentaremos algúnos resultados relacionados (ver Andrews, Askey y Roy (1999), Artin (1964) y Carlson (1977)).

Definición 1.2.3. Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es convexa si para cualquier $x, y \in (a, b)$ se cumple $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$, $\forall \lambda \in (0, 1)$.

Teorema 1.2.12. *Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si para cualquier $a < x < y < z < b$, se tiene:*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Prueba. Sean los valores x, y y z tales que: $a < x < y < z < b$. En este caso tenemos que $\lambda = \dfrac{z - y}{z - x} < 1$ y $1 - \lambda = \dfrac{y - x}{z - x}$. Ahora como $y = \dfrac{z - y}{z - x}x + \dfrac{y - x}{z - x}z$, aplicando f tenemos:

$$f(y) = f\left(\frac{z - y}{z - x}x + \frac{y - x}{z - x}z\right) \leqslant \frac{z - y}{z - x} f(x) + \frac{y - x}{z - x} f(z),$$

entonces $(z - x) f(y) \leqslant (z - y) f(x) + (y - x) f(z)$, por lo que $(z - y)(f(y) - f(x)) \leqslant (y - x)(f(z) - f(y))$, por lo tanto:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

El reciproco se prueba haciendo las manipulaciones inversas realizadas en la primera parte de la demostración, es decir, si $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$, entonces $f(y) \leqslant \dfrac{z-y}{z-x}f(x) + \dfrac{y-x}{z-x}f(z)$ y como $f(y) = f\left(\dfrac{z-y}{z-x}x + \dfrac{y-x}{z-x}z\right)$, con $\lambda = \dfrac{z-y}{z-x} < 1$ y $1-\lambda = \dfrac{y-x}{z-x}$, entonces

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z) \quad \forall x, z \in (a,b).$$

Ahora, variando y podemos obtener que el valor de λ recorre todo el intervalo $]0,1[$; así $f(x)$ satisface la definición de función convexa. □

Teorema 1.2.13. *Si una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable, entonces es convexa si y solo si $f''(x) \geqslant 0$ para cada $x \in (a,b)$.*

Prueba. Dado que f es convexa y es dos veces diferenciable en (a,b), elegimos $a < x < y < w < z < b$ y por el teorema 1.2.12 tenemos que:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$$

consideremos los límites como $y \to x^+$ y $w \to z^-$, entonces $f'(x) \leqslant f'(z)$ con x, z dos puntos arbitrarios tales que $x < z$, entonces f' es creciente en (a,b), por lo tanto, $f''(x) \geqslant 0$ para todo $x \in (a,b)$.

El recíproco se obtiene recorriendo el camino inverso de la prueba de la primera parte. □

Veamos ahora que la función Gamma es log-convexa, para ello necesitamos probar las desigualdades de Young y de Hölder.

Inicialmente probemos la siguiente proposición:

Proposición 1.2.14. *(Desigualdad de Young) Sea $\varphi : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ una función continua, y estrictamente creciente y tal que $\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = \infty$, $\varphi(0) = 0$. Sean $\psi = \varphi^{-1}$ y definamos $\phi(x) := \int_0^x \varphi(u)du$, $\Psi(x) := \int_0^x \psi(u)du$, entonces para todo $a, b \in [0,\infty[$ vale: $ab \leqslant \phi(a) + \Psi(b)$. La igualdad vale si y solo si $b = \varphi(a)$.*

Prueba. Es claro que $\phi(a) + \Psi(\varphi(a)) = \int_0^a \varphi(u)du + \int_0^{\varphi(a)} \psi(u)du = a\varphi(a)$, donde a y $\varphi(a)$ son lados del rectángulo (ver figura 1.2). De esta forma, $\phi(a) + \Psi(b) = a\varphi(a) + \Psi(b) - \Psi(\varphi(a))$.

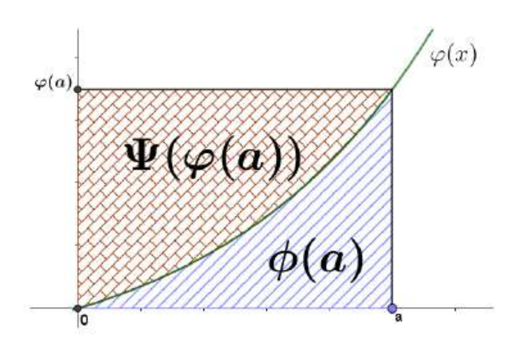


Figura 1.2: Interpretación geométrica de la desigualdad de Young

Los siguientes gráficos representan las áreas ab, $\phi(a)$ y $\Psi(b)$

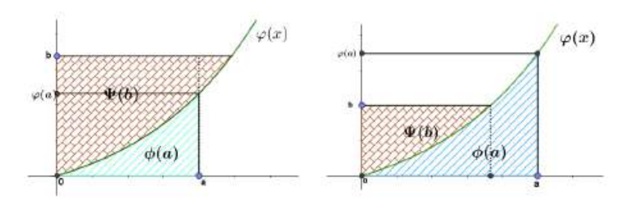


Figura 1.3: Interpretación geométrica de la desigualdad de Young

En ambos se verifica que $ab \leqslant \phi(a) + \Psi(b)$ y que la igualdad vale si $b = \varphi(a)$. $\square$

Sean ahora p, q números tales que $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, por ejemplo, $q = \frac{p}{p-1}$.

Corolario 1.2.15. *Sean $p > 1$, $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, entonces*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

y son iguales si y solo si $a^p = b^q$.

Prueba. Sea $\varphi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ la función $\varphi(x) = x^{p-1}$. En este caso su inversa es $\psi : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $\psi(x) = \sqrt[p-1]{x}$

$$\phi(a) = \int_0^a \varphi(x)dx = \int_0^a x^{p-1}dx = \frac{1}{p}x^p\Big|_0^a = \frac{a^p}{p}$$

$$\Psi(b) = \int_0^b v^{\frac{1}{p-1}}dv = \frac{v^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}}\Bigg|_0^b = \frac{v^q}{q}|_0^b = \frac{b^q}{q}.$$

De acuerdo a la desigualdad de Young tenemos:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

como queríamos probar. También, la igualdad ocurre si y solo si $b = \varphi(a) = a^{p-1}$, esto es $b^{\frac{1}{p-1}} = a$, luego $b^q = b^{\frac{p}{p-1}} = \left(b^{\frac{1}{p-1}}\right)^p = a^p$. □

Ahora estamos en condiciones de probar:

Teorema 1.2.16. *(Desigualdad de Hölder) Sean p y q números positivos tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces para cualquier par de funciones integrables $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ tenemos la desigualdad:*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Prueba. Sea $\alpha = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$ y $\beta = \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$, si $\alpha = 0$ quiere decir que $|f(x)|^p = 0$ para casi todo $x \in]a,b[$ y eso implica que $f(x) = 0$ para casi todo $x \in]a,b[$. Así, para toda función integrable $g(x)$se cumplirá $f(x)g(x) = 0$ para casi todo $x \in]a,b[$ y, por tanto $\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx = 0$. Así, la desigualdad pasa a ser una igualdad trivial, $0 = 0$, lo mismo ocurre si $\beta = 0$.

Si ocurre que $\alpha = +\infty$ o $\beta = +\infty$ entonces la desigualdad se cumple de manera trivial.

Consideremos el caso en que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ y denotemos por $u(x)$ y $v(x)$ a las funciones $u(x) = \frac{|f(x)|}{\alpha}$ y $v(x) = \frac{|g(x)|}{\beta}$. Tenemos que:

$$\int_a^b u^p dx = \frac{1}{\alpha^p}\int_a^b |f|^p dx = 1 \tag{1.1}$$

$$\int_a^b v^q dx = \frac{1}{\beta^q}\int_a^b |g|^q dx = 1 \tag{1.2}$$

ahora aplicamos el corolario 1.2.15 a $u(x)$ y $v(x)$, $\forall x \in (a,b)$ y tenemos:

$$u(x)v(x) \leqslant \frac{(u(x))^p}{p} + \frac{(v(x))^q}{q}$$

integrando con respecto a x en (a,b) tenemos:

$$\int_a^b u(x)v(x)dx \leqslant \int_a^b \frac{(u(x))^p}{p}dx + \int_a^b \frac{(v(x))^q}{q}dx$$

y aplicando las igualdades (1.1) y (1.2) llegamos a:

$$\int_a^b u(x)v(x)dx \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

esto es:

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)|dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant 1$$

luego:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

como señala la desigualdad. □

Tenemos ahora el siguiente resultado:

Teorema 1.2.17. $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *es* log-*convexa.*

Prueba. Sea $1 \leqslant p < \infty$ y q tales que: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De la definición 1.2.1 de la función Gamma, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{p}-1} e^{-t}\, dt \\
&= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{p}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} e^{t(-\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} dt \\
&= \int_0^\infty \left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{p}} \left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

y usando la desigualdad de Hölder con $f(x) = \left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{p}}$ y $g(y) = \left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{q}}$ tenemos que

$$\int_0^\infty \left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{p}} \left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

por lo que:

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leqslant [\Gamma(x)]^{\frac{1}{p}} \, [\Gamma(y)]^{\frac{1}{q}}.$$

Ahora si aplicamos log a ambos lados de la desigualdad y además hacemos $\lambda = \frac{1}{p}$ entonces $1 - \lambda = \frac{1}{q}$, se cumple que:

$$\ln[\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y)] \leqslant \lambda \ln[\Gamma(x)] + (1-\lambda)\ln[\Gamma(y)].$$

Este resultado es para todo $x, y \in (0, \infty)$ y por lo tanto la función Gamma es log- convexa, de acuerdo a la definición 1.2.3. ☐

El siguiente resultado prueba que la función Gamma es la única función log-convexa que satisface $\Gamma(1) = 1$ y $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$:

Teorema 1.2.18. *(Bohr-Mollerup) Existe una única función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que* $\log(f(x))$ *es convexa y cumple con $f(1) = 1$ y $f(x+1) = xf(x)$.*

Prueba. Primero consideremos $x \in (0,1)$ y n entero positivo. Usando el teorema 1.2.12, con $\log(f(x))$ que es convexa en los intervalos $[n, n+1]$, $[n+1, n+x+1]$ y $[n+1, n+2]$ obtenemos:

$$\frac{\log(f(n+1)) - \log(f(n))}{n+1-n} \leqslant \frac{\log(f(n+x+1)) - \log(f(n+1))}{(n+x+1)-(n+1)} \leqslant\to$$
$$\to \leqslant \frac{\log(f(n+2)) - \log(f(n+1))}{(n+2)-(n+1)}$$

así:

$$\log\left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right) \leqslant \frac{\log(f(n+x+1)) - \log(f(n+1))}{x} \leqslant \log\left(\frac{f(n+2)}{f(n+1)}\right). \tag{1.3}$$

Sabemos por hipótesis que $f(x+1) = xf(x)$ y $f(1) = 1$ de lo que deducimos que: $f(n+1) = n!$ y además $f(n+x+1) = (n+x)f(n+x) = (n+x)(n+x-1)f(n+x-1) = \ldots = (n+x)(n+x-1)\cdot xf(x)$, entonces en (1.3) tenemos:

$$\log\left(\frac{n!}{(n-1)!}\right) \leqslant \frac{\log((n+x)(n+x-1)\cdots xf(x)) - \log(n!)}{x} \leqslant\to$$
$$\to \leqslant \log\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)$$

multiplicando esta última desigualdad por x y usando las propiedades de factorial y logaritmo, obtenemos:

$$x\log(n) \leqslant \log\left(\frac{(n+x)(n+x-1)\cdots xf(x)}{n!}\right) \leqslant x\log(n+1)$$

si restamos $x\log(n)$ y aplicando el límite para $n \to \infty$, tenemos:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}\left[\log\left(\frac{(n+x)(n+x-1)\cdots x}{n!n^x}\right) + \log(f(x))\right] \leqslant 0,$$

por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{(n+x)(n+x-1)\cdots x}{n!n^x}\right) + \log(f(x)) = 0$$

y dado que el logaritmo es continua, se obtiene que:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(n+x)(n+x-1)\cdots x} \tag{1.4}$$

Ahora veamos que la identidad (1.4) es valida para $x \in (0,\infty)$. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x \in]m, m+1[$. Sabemos que $f(x+1) = xf(x)$, entonces $f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-m)f(x-m)$ con $(x-m) \in (0,1)$, entonces aplicando (1.4) a $f(x-m)$ tenemos:

$$f(x-m) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{x-m}}{(n+x-m)(n-1+x-m)\cdots(x-m)},$$

entonces

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-m)n!n^{x-m}}{(n+x-m)(n-1+x-m)\cdots x(x-1)\cdots(x-m)}$$

si multiplicamos por $\frac{(n+x)(n-1+x)\cdots(n-(m-1)+x)}{(n+x)(n-1+x)\cdots(n-(m-1)+x)}$ y por propiedades del límite nos da:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(n+x)\cdots x} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+x)\cdots(n-(m-1)+x)}{n\cdots n}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(n+x)\cdots x} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{x-(m-1)}{n}\right),$$

por lo tanto:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(n+x)(n-1+x)\cdots x} \qquad \forall x \in (0,\infty). \tag{1.5}$$

Ahora veamos que

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(n+x)(n-1+x)\cdots x}$$

para $0 < x < 1$.
Sabemos que $e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$, entonces la función Gamma la podemos reescribir de la forma $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$, entonces tenemos que $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$, usando el cambio de variable $u = \frac{t}{n}$ nos da que:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = \lim_{n\to\infty} n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$$

integrando por partes tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = \lim_{n\to\infty} n^x \left[\frac{(1-u)^n u^x}{x} \Big|_0^1 \right. \to$$
$$\to + \left. \int_0^1 \frac{n(1-u)^{n-1} u^x}{x} du \right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^x \cdot \frac{n}{x} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x du$$

e integrando por partes $(n-1)$−veces está última expresión, tenemos que:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x \cdot \frac{n(n-1)\cdots 1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1} du$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^x \cdot \frac{n(n-1)\cdots 1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \cdot \frac{1}{x+n},$$

entonces

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \tag{1.6}$$

Por lo tanto $f(x) = \Gamma(x)$ para $0 < x < 1$. Cómo $f(1) = \Gamma(1) = 1$, tenemos la igualdad de las dos funciones para $0 < x \leqslant 1$. Las relaciones $f(x+1) = xf(x)$ y $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para $0 < x < 1$, implicarán $f(x) = \Gamma(x)$ para $0 < x \leqslant 2$ y, sucesivamente, tendremos $f(x) = \Gamma(x)$ para cada $x > 0$, como señalado.

□

Nota. Notamos que si $-1 < x < 0$, entonces de $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ obtenemos:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{x+1}}{x(x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

De aquí concluimos que la expresión $\lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ vale para todo $x \neq 0, -1, -2, \ldots$

1.2.2 Representaciones de la Función Gamma

Desde que Euler empezó a trabajar en la interpolación de los números factoriales, diferentes matemáticos han representado la función Gamma de diferentes maneras. En esta sección exhibiremos algunas de las representaciones más comunes de la función Gamma y demostraremos su equivalencia.

Observação. (Límite de Gauss) De la demostración del Teorema 1.2.18 concluimos que para todo $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ se verifica:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

Observação. En la sección 1.1, vimos algúnos antecedentes históricos de la función Gamma y, allí observamos que, al interpolar el factorial de un número, Euler representó esta interpolación como un producto que convergía en el infinito, por ello tenemos la siguiente representación, que es equivalente a la encontrada en el teorema de Bohr-Mollerup, la que dice que para $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

que resulta ser una expresión equivalente, en el límite, a la expresión que usaba Carl Friedrich Andrews, Askey y Roy (1999):

La Constante de Euler-Mascheroni (γ)

Consideremos la siguiente sucesión:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Si $n \to \infty$ tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty - \infty$ y sabemos que '$\infty - \infty$' es una forma indefinida, pudiendo ser convergente o divergente. Calculemos los primeros términos de esta sucesión:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 - \ln(1) = 1\\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} - \ln(2) \approx 0,8068528194\\
S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ln(3) \approx 0,7347210447\\
&\vdots\\
S_{10} &\approx 0,6263831610\\
&\vdots\\
S_{50} &\approx 0,5871823229\\
&\vdots\\
S_{100} &\approx 0,5822073317
\end{aligned}$$

estos cálculos parecen indicar que la sucesión $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Euler fue el primero en probar que la sucesión converge a un límite que llamó γ. Esto es: $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} \gamma$. Hoy este límite es conocido como la constante de Euler-Mascheroni ($\gamma \approx 0,5772156649$), es decir tenemos: $\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \ln(n))$.

Antes de probar que esté límite existe, probaremos algúnos resultados previos:

Lema 1.1. *La sucesión* $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$ *es creciente para todo* $n \in \mathbb{N}$

Prueba. Tenemos que:

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right);$$

esto es:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) \tag{1.7}$$

aplicando el teorema del valor medio a la función $y = \ln(x)$, entre los puntos $(n+1)$ y $(n+2)$, tenemos que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ con $c \in (a,b)$, entonces:

$$\frac{\ln(n+2) - \ln(n+1)}{(n+2)-(n+1)} = \frac{1}{c} \quad c \in (n+1, n+2)$$

$$\ln(n+2) - \ln(n+1) = \frac{1}{n+\theta} \quad ,\theta \in (1,2)$$

$$\ln(n+1) - \ln(n+2) = -\frac{1}{n+\theta} \quad ,\theta \in (1,2) \tag{1.8}$$

de (1.7) y (1.8) tenemos que $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\theta} = \frac{\theta - 1}{(n+1)(n+\theta)}$ y como $\theta \in (1,2)$, entonces obtenemos que $a_{n+1} - a_n = \frac{\theta-1}{(n+1)(n+\theta)} > 0$, por lo tanto, $a_{n+1} - a_n > 0$, entonces $a_{n+1} > a_n$, por lo tanto, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, como queríamos probar. □

Lema 1.2. *La sucesión* $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ *es decreciente para todo* $n \in \mathbb{N}$

Prueba. Tenemos que:

$$s_{n+1} - s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$$

esto es:

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \tag{1.9}$$

aplicando el teorema del valor medio a la función $y = \ln(x)$, entre los puntos (n) y $(n+1)$, tenemos que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$ con $c \in (a, b)$, entonces:

$$\frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{(n+1) - (n)} = \frac{1}{c} \quad c \in (n, n+1)$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{n+\theta} \quad , \theta \in (0,1)$$

$$\ln(n) - \ln(n+1) = -\frac{1}{n+\theta} \quad , \theta \in (0,1) \tag{1.10}$$

de (1.9) y (1.10) tenemos que $s_{n+1} - s_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+\theta} = \dfrac{\theta - 1}{(n+1)(n+\theta)}$ y como $\theta \in (0,1)$, entonces tenemos que $s_{n+1} - s_n = \dfrac{\theta - 1}{(n+1)(n+\theta)} < 0$, por lo tanto. $s_{n+1} - s_n < 0$, entonces $s_{n+1} < s_n$, por lo tanto, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, como señalado. □

Lema 1.3. *Para las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidas en los lemas 1.1 y 1.2, se cumple que $s_n > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

Prueba. $s_n > a_n$ si y solo si $1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} - \ln(n) > 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} - \ln(n+1)$ si y solo si $\ln(n+1) - \ln(n) > 0$ si y solo si $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$ y como $1 + \frac{1}{n} > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, tenemos lo anunciado. □

Teorema 1.2.19. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, definidas en los lemas 1.1 y 1.2, convergen al mismo límite.*

Prueba. Del lema 1.3 tenemos que $s_n > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ y por los lemas 1.1 y 1.2 sabemos que s_n es decreciente y a_n es creciente, por lo que:

$$s_1 > s_2 > \ldots s_n > a_n > \ldots a_2 > a_1$$

con $a_1 = 1 - \ln(2) \approx 0,3068528194$ y $s_1 = 1 - \ln(1) = 1$ por tanto, s_n está acotado superiormente por 1 e inferiormente por $0,3068528194$ $(0,3068528194 < s_n < 1)$ .Con lo que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada, así converge. Sea $\gamma = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Falta ver que $\lim_{n\to\infty} a_n = \gamma$. Para ello notemos qu:e $\lim_{n\to\infty}(s_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}(\ln(n+1) - \ln(n)) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(1) = 0$, por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \gamma$,

como señalado. □

El valor límite γ se conoce como la constante de Euler-Mascheroni. usando esta constante, Weiertrass obtuvo una expresión para el recíproco de la función Gamma Havil (2003):

Proposición 1.2.20. *(Producto de Weiertrass)*
Para $x \neq 0, -1, -2, \cdots$ *y* $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)$ *se verifica:*

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}.$$

Prueba. Representemos la función Gamma, como el límite de Gauss, dado en la observación :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x}{\frac{1}{n!}x(x+1)\cdots(x+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^x}{x\cdot\frac{(x+1)}{1}\cdot\frac{(x+2)}{2}\cdots\frac{x+n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x}{x(1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n})}$$

podemos escribir $n^x = e^{x(\ln(n)-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n})}\cdot e^{x+\frac{x}{2}+\ldots+\frac{x}{n}}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^x}{x(1+x)\cdots(1+\frac{x}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{x(\ln(n)-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n})}\cdot e^{x+\frac{x}{2}+\ldots+\frac{x}{n}}}{x(1+x)\cdots(1+\frac{x}{n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{x(\ln(n)-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n})}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{e^x}{1+x}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}}{(1+\frac{x}{2})}\cdots\frac{e^{\frac{x}{n}}}{(1+\frac{x}{n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-x(1+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n))}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[x^{-1}\cdot(1+x)^{-1}e^x\cdots(1+\frac{x}{n})^{-1}e^{\frac{x}{n}}\right] =$$

$$= x^{-1}e^{-x\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n))}\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x}{i}\right)^{-1}e^{\frac{x}{i}}$$

y como vimos $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)) = \gamma$, con γ la constante de Euler-Mascheroni, por lo tanto:

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{(1+\frac{x}{n})}$$

y el recíproco de está expresión es conocida como la fórmula de Weiertrass, a saber:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

□

Usando el producto de Weiertrass tenemos que la función Gamma se representa por la expresión:

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{(1 + \frac{x}{n})}. \tag{1.11}$$

Representaciones Integrales

La definición 1.2.1 nos entrega una representación integral de la función Gamma, conocida como la integral de Euler. Esta no es la única representación en forma de integral de esta función. Por ejemplo, la que entrega la observación y que está dada por:

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{\infty} y^{2x-1} e^{-y^2} dy.$$

En lo que sigue, veremos otras representaciones.

Proposición 1.2.21. *Para $a > 0$ tenemos:*

$$\Gamma(x) = a^x \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-ay} dy.$$

Prueba. Usando la definición 1.2.1 y el cambio de variables $t = ay$ tenemos el resultado. □

Proposición 1.2.22.

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xy} e^{-e^y} dy.$$

Prueba. Es sólo usar la definición 1.2.1 y el cambio de variables $t = e^y$. □

Proposición 1.2.23.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-y^{\frac{1}{x}}} dy.$$

Prueba. Nuevamente usamos la definición 1.2.1 y el cambio de variable $y = t^x$ se obtiene el resultado.

□

1.2.3 Función Beta de Euler

La función beta se origina de la integral de Euler $\int x^e(1-x)^n dx$ y que Legendre llamó *primera integral de Euler*. La forma moderna de la función beta es:

Definición 1.2.4. Para $x, y > 0$, la función beta se define por

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Al igual que la función Gamma, es fácil ver la función beta es convergente para $x, y > 0$.

Teorema 1.2.24. *La integral* $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ *converge para* $x, y > 0$

Prueba. Como en la función Gamma, separaremos la integral como la suma de dos integrales y veremos su convergencia por separado:

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt =& \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\\ =& I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Para I_1, $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$, tenemos que $t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1} \leqslant 2t^{x-1}$, entonces:

$$I_1 \leqslant 2\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}dt = 2\lim_{a\to 0^+}\left[\frac{t^x}{x}\right]_a^{\frac{1}{2}} = \lim_{a\to 0^+}\frac{2^{-x}-a^x}{x} = \frac{2^{-x+1}}{x}.$$

Para la segunda integral, cuando $\frac{1}{2} \leqslant t < 1$, tenemos: $t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1} \leqslant 2(1-t)^{y-1}$ y entonces:

$$\begin{aligned}I_2 \leqslant 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{y-1}dt =& 2\lim_{a\to 1^-}\left.\frac{(1-t)^y}{-y}\right|_{\frac{1}{2}}^a\\ =& 2\lim_{a\to 1^-}\frac{2^{-y}-(1-a)^y}{y}\\ =& \frac{2^{-y+1}}{y}.\end{aligned}$$

Esto establece la convergencia de la función beta para $x, y > 0$. □

Como sucede con la función Gamma, la función beta tiene diversas representaciones y propiedades:

Proposición 1.2.25. $\beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)d\theta.$

Prueba. Usando el cambio de variable $t = \sin^2(\theta)$ y reemplazando en la definición 1.2.4 tenemos:

$$\beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)d\theta.$$

□

Proposición 1.2.26. $\beta(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}dt.$

Prueba. Usando el cambio de variable $t = \frac{1}{u}$, y reemplazando en la definición 1.2.4 tenemos:

$$-\int_{\infty}^{1} \left(\frac{1}{u}\right)^{x-1}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{y-1} u^{-2}du = \int_1^{\infty} u^{-x-y}(u-1)^{y-1}du \qquad (1.12)$$

y ahora usando otro cambio de variables, $u-1 = z$ y reemplazando en la ecuación (1.12), tenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}dz.$$

□

Proposición 1.2.27. *La función beta es simétrica. Esto es:* $\beta(x.y) = \beta(y,x)$ *para todo* $x, y > 0$.

Prueba. Dada la función beta $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ y usando el cambio de variable $u = 1-t$, entonces

$$\begin{aligned}\beta(x,y) =& -\int_1^0 (1-u)^{x-1}(u)^{y-1}du\\ =& \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du\\ =& \beta(y,x),\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\beta(x,y) = \beta(y,x).$$

□

La siguiente proposición expresa una relación fundamental entre las funciones beta y Gamma.

Proposición 1.2.28. $\beta(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ *para todo* $x, y > 0$.

Prueba. Sea $\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du$, ahora usando los cambios de variables $t = a^2$ y $u = b^2$ y el teorema de Fubini, tenemos que:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a^2-b^2}a^{2x-1}b^{2y-1}dadb \tag{1.13}$$

ahora, haciendo el cambio de variables $a = r\cos(\theta)$ y $b = r\sin(\theta)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) =&4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2}(r\cos(\theta))^{2x-1}(r\sin(\theta))^{2y-1}rd\theta dr\\ =&2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(\theta)\sin^{2y-1}(\theta)d\theta \cdot 2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2x+2y-1}dr\end{aligned}$$

y dado que $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ y la observación , tenemos que $\Gamma(x+y) = 2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2x+2y-1}dr$ y, en consecuencia, obtenemos: $\Gamma(x)\Gamma(y) = \beta(x, y)\Gamma(x+y)$. Por tanto:

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

□

1.2.4 Fórmula de Reflexión

Una propiedad interesante de la función Gamma viene dada por la fórmula de reflexión. Antes de establecer dicha fórmula, demostraremos la fórmula de Euler-Wallis:

Teorema 1.2.29. $\sin(x) = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$

Prueba. El resultado es cierto si x es múltiplo de π, dado que ambos miembros de la identidad son cero. Supongamos, por tanto, que x no es múltiplo de π.

Notemos que si n es un entero positivo impar, entonces $\sin(nx)$ es un polinomio en $\sin(x)$ de grado n y $\cos(nx)$ es un polinomio en $\cos(x)$ de grado n. Ambos polinomios sólo tienen potencias impares de $\sin(x)$ y $\cos(x)$, respectivamente.

En efecto: Para $n = 3$ tenemos:

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x + x)\\ &= \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)\\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + (\cos^2(x) - \sin^2(x))\sin(x)\\ &= 2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) + (1 - 2\sin^2(x))\sin(x)\\ &= 3\sin(x) - 4\sin(x)^3;\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x)\\ &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)\\ &= (\cos^2(x) - \sin^2(x))\cos(x) - 2\cos(x)\sin^2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x)\\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x);\end{aligned}$$

como anunciado.

Suponemos, inductivamente, que el resultado es cierto para $n = 3, 5, ..., n-2$. En particular $\sin((n-2)x) = P_{n-2}(\sin(x))$ y $\cos((n-2)x) = Q_{n-2}(\cos(x))$ dónde $P_{n-2}(x)$ y $Q_{n-2}(x)$ son polinomios de grado $n-2$ en x y con sólo potencias impares de x (sin término constante).

El resultado para n se deduce ahora de la expresión

$$\sin(nx) = \sin((n-2)x + 2x) = \sin((n-2)x)\cos(2x) + \cos((n-2)x)\sin(2x)$$

a la cual aplicamos las hipótesis inductivas sobre $\sin((n-2)x)$ y $\cos((n-2)x)$. Notamos que la función $\sin(nx)$, se anula cuando x es un múltiplo de $\frac{\pi}{n}$ de modo que, cuando n es impar, podemos escribir:

$$\sin(nx) = K_1 \cdot \sin(x) \prod_{r=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(\sin^2(x) - \sin^2\left(\frac{r\pi}{n}\right)\right). \tag{1.14}$$

Esta expresión es así ya que, cómo vimos, $\sin(nx)$ es un polinomio en potencias impares de $\sin(x)$ que se anula en los múltiplos de $\frac{\pi}{n}$. La ecuación (1.14) también puede escribirse:

$$\sin(nx) = K_2 \cdot \sin(x) \prod_{r=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin\left(\frac{r\pi}{n}\right)}\right). \tag{1.15}$$

En estas expresiones las constantes K_1, K_2 son independientes de x, pero pueden depender de n.
Reemplazando en la ecuación (1.15) el valor de nx por x, tenemos que:

$$\sin(x) = K_2 \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{r=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{\sin\left(\frac{r\pi}{n}\right)}\right).$$

Así, para los valores de x considerados se tiene

$$K_2 = \left\{\frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}\right\} \div \prod_{r=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{\sin\left(\frac{r\pi}{n}\right)}\right).$$

En esta última identidad el miembro de la izquierda es independiente de x, y por consiguiente, lo mismo debe acontecer al de la derecha. Para determinar su valor común, hagamos $x \to 0$, entonces

$$K_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{n}\right)} = n.$$

La igualdad de la derecha se obtiene aplicando la regla de l'Hôpital.

Luego, para todos los valores de x considerados y para todos los enteros positivos n, se tendrá:

$$\sin(x) = n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{r=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{\sin\left(\frac{r\pi}{n}\right)}\right) = n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + f_r(n)(x)\right). \qquad (1.16)$$

Aquí, las funciones $f_r(n)(x)$ están definidas por: $f_r(n)(x) = 0$, sí $r > \frac{n-1}{2}$ y $f_r(n)(x) = -\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{\sin\left(\frac{r\pi}{n}\right)}$, caso $r \leqslant \frac{n-1}{2}$.
Ahora, cómo para $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ se cumple que $\frac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin(\theta) \leqslant \theta$, obtenemos para $n > \frac{2|x|}{\pi}$ que:

$$|f_r(n)(x)| \leqslant \frac{x^2}{n^2}\frac{n^2\pi^2}{4r^2\pi^2} = \frac{x^2}{4r^2}.$$

□

Observação. De este último resultado, vemos que $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{\pi^2 n^2}\right)$, entonces

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi} = x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Ahora podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 1.2.30. *Fórmula de reflexión de Euler:*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, x \notin \mathbb{Z}.$$

Prueba. Dado que la función Gamma tiene varias representaciones, usaremos $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$, entonces

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x\cdots(x+n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-x} n!}{(1-x)\cdots(n+1-x)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1-x} \cdot \frac{n!\cdot n!}{x(1+x)(1-x)(2+x)(2-x)\cdots(n+x)(n-x)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{[n!]^2}{x(1-x^2)(4-x^2)\cdots(n^2-x^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2}{x(1-x^2)\cdots(n^2-x^2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x\cdot \frac{1-x^2}{1^2}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2-x^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x(1-x^2)(1-\frac{x^2}{2^2})\cdots(1-\frac{x^2}{n^2})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x\prod_{r=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{\frac{\sin(\pi x)}{\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

□

Otra manera de probar la fórmula de reflexión de Euler, es utilizando una integración de contorno en el plano complejo.

Prueba. Hagamos $0 < x < 1$ y usemos el hecho que $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ y $\beta(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$. Hacemos $(x,y) = (x, 1-x)$ y tenemos que

$$\beta(x,1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+1-x)} = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)}dt.$$

Ahora para calcular este integral, lo hacemos mediante la integral de contorno: $\int_C \frac{z^{x-1}}{1-z}dz$

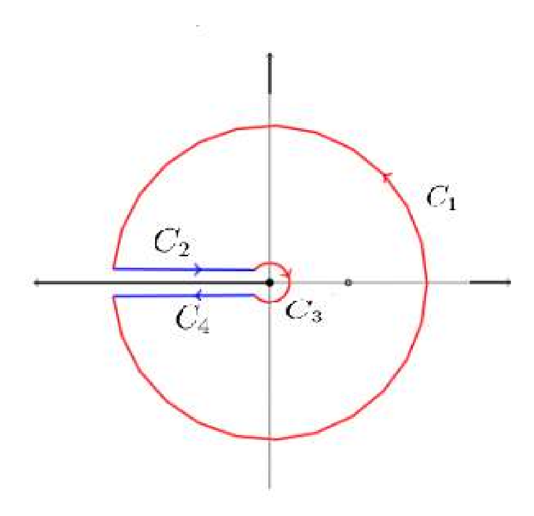


Figura 1.4: Contorno para integral compleja.

Donde el contorno $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ consiste en dos circunferencias centradas en el origen y de radios R y ϵ respectivamente, como muestra la figura 1.4. Por el teorema de residuos tenemos:

$$\int_C \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = -2\pi i,$$

entonces

$$-2\pi i = \int_{C_1} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz + \int_{C_2} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz + \int_{C_3} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz + \int_{C_4} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz \qquad (1.17)$$

donde C_1 es la circunferencia exterior de radio R, C_2 denota el segmento que va desde $-R$ a $-\epsilon$,C_3 denota el radio interior ϵ y C_4 es el segmento que va de $-\epsilon$ a $-R$.
Entonces para el circunferencia exterior hacemos el siguiente cambio de variable $z = Re^{i\theta}$ y tenemos:

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^{x-1} e^{i(x-1)\theta}}{1-Re^{i\theta}} d(Re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{iR^x e^{ix\theta}}{1-Re^{i\theta}} d\theta$$

y dado que $0 < x < 1$ tenemos:

$$I_1 = \lim_{R\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{iR^x e^{ix\theta}}{1-Re^{i\theta}} d\theta,$$

entonces

$$
\begin{aligned}
|I_1| = \lim_{R\to\infty}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{iR^x e^{ix\theta}}{1-Re^{i\theta}}d\theta\right| \leqslant \lim_{R\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|R|^x}{R-1}d\theta =& \\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{R^x\theta}{R-1}\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&=2\pi \lim_{R\to\infty}\frac{R^x}{R-1} \\
&=\frac{\infty}{\infty}
\end{aligned}
$$

aplicamos l'Hôpital y tenemos:

$$
|I_1| \leqslant 2\pi \lim_{R\to\infty} xR^{x-1} = 0,
$$

por lo tanto, $I_1 = 0$.
Para la circunferencia interior, I_3, hacemos el siguiente cambio de variable $z = \epsilon e^{i\theta}$ y tenemos:

$$
I_3 = \int_{C_3}\frac{z^{x-1}}{1-z}dz = \int_{\pi}^{-\pi}\frac{\epsilon^{x-1}e^{i(x-1)\theta}}{1-\epsilon e^{i\theta}}d(\epsilon e^{i\theta}) = \int_{\pi}^{-\pi}\frac{i\epsilon^x e^{ix\theta}}{1-\epsilon e^{i\theta}}d\theta,
$$

entonces

$$
I_3 = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{-\pi}\frac{i\epsilon^x e^{ix\theta}}{1-\epsilon e^{i\theta}}d\theta,
$$

por lo que:

$$
\begin{aligned}
|I_3| = \lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_{\pi}^{-\pi}\frac{i\epsilon^x e^{ix\theta}}{1-\epsilon e^{i\theta}}d\theta\right| \leqslant \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{-\pi}\frac{|\epsilon|^x}{\epsilon-1}d\theta =& \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon^x\theta}{\epsilon-1}\Big|_{\pi}^{-\pi} \\
&=-2\pi \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon^x}{\epsilon-1} \\
&=0,
\end{aligned}
$$

por lo tanto, $I_3 = 0$.
Para el segmento que va desde la circunferencia exterior a la circunferencia interior y para el segmento que va desde la circunferencia interior a la circunferencia exterior, C_2 y C_4, escribimos $z = -t = te^{\pi i}$ y $z = -t = te^{-\pi i}$ respectivamente. Entonces reemplazando en (1.17) tenemos:

$$
\int_{\infty}^{0}\frac{t^{x-1}e^{ix\pi}}{1+t}dt + \int_{0}^{\infty}\frac{t^{x-1}e^{-ix\pi}}{1+t}dt = -2\pi i,
$$

entonces

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}dt\left[e^{-ix\pi}-e^{ix\pi}\right],$$

por lo que:

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}dt=\frac{2\pi i}{e^{ix\pi}-e^{-ix\pi}}$$

y dado que $\sin(x)=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$, entonces

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{\sin(\pi x)},$$

por lo tanto:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

□

Proposición 1.2.31. *(Fórmula de duplicación para la función Gamma):*

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}.$$

Prueba. Dada la definición de la función beta 1.2.4 y la proposición 1.2.28 tenemos la siguiente relación:

$$\beta(x,x)=\frac{[\Gamma(x)]^2}{\Gamma(2x)}=\int_0^1 (t(1-t))^{x-1}\,dt \tag{1.18}$$

y usando el cambio de variable $t=\dfrac{u+1}{2}$, tenemos:

$$2^{1-2x}\int_{-1}^1(1-u^2)^{x-1}du=2^{2-2x}\int_0^1(1-u^2)^{x-1}du$$

ahora, usando el cambio de variable $u=\sqrt{v}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\beta(x,x)=&2^{1-2x}\int_0^1 v^{\frac{1}{2}-1}(1-v)^{x-1}dv=2^{1-2x}\beta(\frac{1}{2},x)\\=&2^{1-2x}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}=\frac{2^{1-2x}\sqrt{\pi}\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}\end{aligned} \tag{1.19}$$

y dado que las ecuaciones (1.18) y (1.19) son iguales, entonces:

$$\frac{2^{1-2x}\sqrt{\pi}\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})} = \frac{[\Gamma(x)]^2}{\Gamma(2x)},$$

por lo tanto:

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}.$$

□

1.2.5 Aproximación de Stirling–De Moivre

Para el cálculo aproximado del valor de la función Gamma podemos usar la aproximación de Stirling–De Moivre.

Proposición 1.2.32. *Sea $x > 0$, entonces:*

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + O(x^{-5})\right)$$

Prueba. Sea $x > 0$, entonces usando la definición de la función Gamma 1.2.1, tenemos $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$. Haciendo el cambio de variable $t = x(1+u)$, tenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_{-1}^{\infty}(x(1+u))^x e^{-x(1+u)}x\,du = \int_{-1}^{\infty} x^x(1+u)^x e^{-x}e^{-xu}x\,du\\ &= \int_{-1}^{\infty} x^{x+1}e^{-x}e^{-xu}e^{x\ln(1+u)}\,du = x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{\infty} e^{x(-u+\ln(1+u))}\,du.\end{aligned}$$

Expandiendo la función $\ln(1+u)$ en serie de Taylor centrada en 0, tenemos que $\ln(1+u) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}u^k}{k}$, luego:

$$\begin{aligned}-u+\ln(1+u) &= -u + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}u^k}{k} = -u + u - \frac{u^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}u^k}{k}\\ &= -\frac{u^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}u^k}{k}\end{aligned}$$

para $|u| < 1$.
Como queremos que la aproximación final, de la serie, contenga términos de hasta el orden x^{-5}, truncaremos la serie $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}u^k}{k}$ hasta el orden 10, esto es garantía suficiente

para obtener los primeros 5 términos de la serie final. Por lo tanto, truncaremos como:

$$\sigma(u) := \sum_{k=3}^{10} \frac{(-1)^{k+1}u^k}{k},$$

entonces

$$\Gamma(x+1) \approx x^{x+1}e^{-x} \int_{-1}^{\infty} e^{x\left(-\frac{u^2}{2}+\sigma(u)\right)} du = x^{x+1}e^{-x} \int_{-1}^{\infty} e^{-x\frac{u^2}{2}} e^{x\sigma(u)} du. \qquad (1.20)$$

Por otra parte también podemos expandir $e^{x\sigma(u)}$ como serie de Taylor para $x \gg 1$, es decir,

$$e^{x\sigma(u)} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(x\sigma(u))^v}{v!} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!} \left(\sum_{k=3}^{10} \frac{(-1)^{k+1}u^k}{k} \right)^v$$

truncaremos esta serie manteniendo los primeros 8 términos para asegurar así los 5 primeros términos de nuestra aproximación, es decir,

$$e^{x\sigma(u)} = \sum_{v=0}^{8} \frac{x^v}{v!} \left(\sum_{k=3}^{10} \frac{(-1)^{k+1}u^k}{k} \right)^v .$$

Para expresar estos términos, al desarrollar estas sumas finitas, usaremos la fórmula de Leibniz, o sea:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_k^{\alpha_k}.$$

Así, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
e^{x\sigma(u)} \approx \sum_{v=0}^{8} \frac{x^v}{v!}\left(\sum_{k=3}^{10}\frac{(-1)^{k+1}u^k}{k}\right)^v &= 1 + x\left(\sum_{k=3}^{10}\frac{(-1)^{k+1}u^k}{k}\right) + \\
&+ \frac{x^2}{2!}\left(\sum_{k=3}^{10}\frac{(-1)^{k+1}u^k}{k}\right)^2 + \frac{x^8}{8!}\left(\sum_{k=3}^{10}\frac{(-1)^{k+1}u^k}{k}\right)^8 \\
&= 1 + x\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots - \frac{u^{10}}{10}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{u^3}{3} - \ldots - \frac{u^{10}}{10}\right)^2 + \\
&+ \frac{x^3}{6}\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots - \frac{u^{10}}{10}\right)^3 + \frac{x^4}{24}\left(\frac{u^3}{3} - \ldots - \frac{u^{10}}{10}\right)^4 + \\
&+ \frac{x^5}{120}\left(\frac{u^3}{3} - \ldots - \frac{u^{10}}{10}\right)^5 + \frac{x^6}{720}\left(\frac{u^3}{3} - \ldots - \frac{u^{10}}{10}\right)^6 + \\
&+ \frac{x^7}{5040}\left(\frac{u^3}{3} - \ldots - \frac{u^{10}}{10}\right)^7 + \frac{x^8}{40320}\left(\frac{u^3}{3} - \ldots - \frac{u^{10}}{10}\right)^8 = \\
&= 1 + x\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} + \frac{u^7}{7} - \frac{u^8}{8} + \frac{u^9}{9} - \frac{u^{10}}{10}\right) + \\
&+ \frac{x^2}{2}\left(\frac{u^6}{9} + \frac{u^8}{16} + \frac{u^{10}}{25} + \frac{u^{12}}{36} + \ldots 2\left[\left(-\frac{u^7}{12} + \frac{u^8}{15} - \right.\right.\right. \\
&- \left.\frac{u^9}{18} + \frac{u^{10}}{21} - \frac{u^{11}}{24} + \frac{u^{12}}{27} + \ldots\right) + \left(\frac{u^9}{20} + \frac{u^{10}}{24} - \frac{u^{11}}{28} + \right. \\
&+ \left.\left.\left.\frac{u^{12}}{32} + \ldots\right) + \left(-\frac{u^{11}}{30} + \frac{u^{12}}{35} + \ldots\right) + \ldots\right]\right) + \\
&+ \frac{x^3}{6}\left(\frac{u^9}{27} - \frac{u^{12}}{64} + \ldots 3\left(-\frac{u^{10}}{36} + \frac{u^{11}}{45} - \frac{u^{12}}{54} + \frac{u^{13}}{63} - \right.\right. \\
&- \left.\frac{u^{14}}{72} + \ldots \frac{u^{11}}{48} + \frac{u^{13}}{80} - \frac{u^{14}}{96} + \ldots + \frac{u^{13}}{75} - \frac{u^{14}}{100} + \ldots\right) + \\
&+ 6\left.\left(-\frac{u^{12}}{60} + \frac{u^{13}}{72} - \frac{u^{14}}{84} + \ldots - \frac{u^{14}}{90} + \ldots +\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{x^4}{24}\left(\frac{u^{12}}{81}+\frac{u^{16}}{256}+\ldots+4\left(-\frac{u^{13}}{108}+\frac{u^{14}}{135}-\frac{u^{15}}{162}+\frac{u^{16}}{189}+\ldots-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{u^{15}}{192}+\ldots\right)+6\left(\frac{u^{14}}{144}+\frac{u^{16}}{225}+\ldots\right)+12\left(-\frac{u^{15}}{180}+\frac{u^{16}}{216}+\ldots+\right.$$

$$\left.\left.+\ \ldots+\frac{u^{16}}{240}+\ldots\right)+\ldots\right)+\frac{x^5}{120}\left(\frac{u^{15}}{243}+\ldots+5\left(-\frac{u^{16}}{324}+\frac{u^{17}}{405}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{u^{18}}{486}+\ldots\right)+10\left(\frac{u^{17}}{432}+\ldots-\frac{u^{18}}{576}+\ldots\right)+20\left(-\frac{u^{18}}{540}+\ldots\right)\right)+$$

$$+\frac{x^6}{720}\left(\frac{u^{18}}{729}+\ldots+6\left(-\frac{u^{19}}{972}+\frac{u^{20}}{1215}+\ldots\right)+15\left(\frac{u^{20}}{1296}+\ldots\right)\right)+$$

$$+\frac{x^7}{5040}\left(\frac{u^{21}}{2187}+\ldots+7\left(-\frac{u^{22}}{2916}+\ldots\right)+\ldots\right)+\frac{x^8}{40320}\left(\frac{u^{24}}{6561}+\ldots\right)$$

reordenando los términos anteriores tenemos:

$$e^{x\sigma(u)} \approx 1+\frac{x}{3}u^3-\frac{x}{4}u^4+\frac{x}{5}u^5+\left(\frac{x^2}{18}-\frac{x}{6}\right)u^6-\left(\frac{x^2}{12}-\frac{x}{7}\right)u^7+$$

$$+\left(\frac{47x^2}{480}-\frac{x}{6}\right)u^8+\left(\frac{x^3}{162}-\frac{19x^2}{180}+\frac{x}{9}\right)u^9-\left(\frac{x^3}{72}-\frac{153x^2}{1400}+\right.$$

$$\left.+\ \frac{x}{10}\right)u^{10}+\left(\frac{31x^3}{1440}-\frac{31x^2}{280}\right)u^{11}+\left(\frac{x^4}{1944}-\frac{493x^3}{17280}+\right.$$

$$\left.+\ \frac{3349x^2}{30240}\right)u^{12}-\left(\frac{x^4}{648}-\frac{1751x^3}{50400}\right)u^{13}+\left(\frac{77x^4}{25920}-\right.$$

$$\left.-\ \frac{4049x^3}{100800}\right)u^{14}+\left(\frac{x^5}{29160}-\frac{727x^4}{155520}\right)u^{15}-\left(\frac{x^5}{7776}-\right.$$

$$\left.-\ \frac{190261x^4}{2903400}\right)u^{16}+\frac{23x^5}{77760}u^{17}+\left(\frac{x^6}{524880}-\frac{503x^5}{933120}\right)u^{18}-$$

$$-\frac{x^6}{116640}u^{19}+\frac{107x^6}{4665600}u^{20}+\frac{x^7}{11022480}u^{21}+\frac{x^7}{2099520}u^{22}+$$

$$+\frac{x^8}{264539520}u^{24}+\ldots\ldots$$

ahora usando la sustitución $u = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} w$, en la ecuación (1.20) tenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) \approx & x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{\infty} e^{-(\frac{x}{2})u^2} e^{x\sigma(u)} du = \\ = & x^{x+1} e^{-x} \int_{-(\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-w^2} e^{x\Delta(w)} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dw,\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \int_{-(\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-w^2} e^{x\Delta(w)} dw \tag{1.21}$$

aquí hemos usado el cambio de variables $\sigma(u) \mapsto \Delta(w)$ y, dado que la serie $\sigma(u)$ converge para $|u| < 1$ y como $u = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} w$, entonces la expansión en serie será más precisa si $x \gg 1$. Además, si sustituimos en el límite inferior de la integral el valor $-\infty$ por el valor $t = -\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ tenemos, reemplazando en la ecuación (1.21) que:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) \approx & \sqrt{2} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} e^{x\Delta(w)} dw = \\ = & \sqrt{2} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \left(\frac{w^4}{x} + \left(\frac{4}{9x} - \frac{4}{3x^2}\right) w^6 + \right. \\ & + \left(\frac{47}{30x^2} - \frac{2}{x^3}\right) w^8 - \left(\frac{4}{9x^2} - \frac{612}{175x^3} + \frac{16}{5x^4}\right) w^{10} + \\ & + \left(\frac{8}{243x^2} - \frac{493}{270x^3} + \frac{6698}{945x^4}\right) w^{12} + \left(\frac{154}{405x^3} - \right. \\ & \left. - \frac{8098}{1575x^4}\right) w^{14} - \left(\frac{8}{243x^3} - \frac{190261}{113400x^4}\right) w^{16} + \\ & + \left(\frac{32}{32805x^3} - \frac{1006}{3645x^4}\right) w^{18} + \frac{428}{18225x^4} w^{20} - \\ & - \frac{32}{32805x^4} w^{22} + \frac{32}{2066715x^4} w^{24} \\ & \left. + \sum_{j=13}^{40} M_j(x) w^{2j} + \sum_{j=1}^{39} N_j(x) w^{2j+1} \right) dw.\end{aligned} \tag{1.22}$$

Veamos ahora como son las integrales de la forma:

$$G_n(\alpha) := \int_0^\infty t^n e^{-\alpha t^2} dt = \int_0^\infty f(t,n,\alpha)dt \quad \forall (n,\alpha) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Para $n = 0$ tenemos que la ecuación $G_0(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t^2} dt$ que es la integral de Gauss, entonces $G_0(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
Para $n = 1$ tenemos que $G_1(\alpha) = \int_0^\infty te^{-\alpha t^2} dt$ e integrando por partes concluimos que: $G_1(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}$.
Ahora, derivando la expresión de $G_n(\alpha)$ tenemos:

$$\frac{dG_n(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^\infty f'_\alpha(t,n,\alpha)dt = -\int_0^\infty t^{n+2} e^{-\alpha} t^2 dt = -G_{n+2}(\alpha)$$

y cambiando índices: $n \mapsto n-2$, tenemos:

$$G_n(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha} G_{n-2}(\alpha). \tag{1.23}$$

Iterando (1.23) y usando que $G_0(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $G_1(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}$ resulta:

- Para n par:

$$G_2(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha} G_0(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\alpha^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}$$

$$G_4(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha} G_2(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\alpha^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot\sqrt{\pi}}{\alpha^{\frac{5}{2}}\cdot 2^3}$$

$$G_6(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha} G_4(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1\cdot 3\cdot\sqrt{\pi}}{\alpha^{\frac{5}{2}}\cdot 2^3}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\sqrt{\pi}}{\alpha^{\frac{7}{2}}\cdot 2^4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$G_n(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha} G_{n-2}(\alpha) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)\cdot\sqrt{\pi}}{2\alpha^{\frac{n+1}{2}}\cdot 2^{\frac{n}{2}}}$$

y dado el hecho que $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdots(n-1)\sqrt{\pi}}{2^{\frac{n}{2}}}$, por lo tanto,

$$G_n(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

- Para $n = 2k+1$ impar:

$$G_3(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}G_1(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha}\right) = -\left(\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$G_5(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}G_3(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha^2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\cdot -\frac{2}{\alpha^3}\right) = \frac{2}{2\alpha^3}$$

$$G_7(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}G_5(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{2}{2\alpha^3}\right) = -\left(\frac{1}{2}\cdot -\frac{6}{\alpha^4}\right) = \frac{6}{2\alpha^4}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$G_{2k+1}(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}G_{2k-1}(\alpha) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{2\alpha^{k+1}} = \frac{k!}{2\alpha^{k+1}};$$

dado que $n = 2k+1$, entonces $k = \frac{n-1}{2}$, $k+1 = \frac{n+1}{2}$ y puesto que $k! = \Gamma(k+1)$ tenemos:

$$G_n(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\alpha^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Notamos que esta última ecuación es la misma para n par o impar. Como en la ecuación (1.22) el intervalo de integración es todo $\mathbb{R}$ y dado que la función $f(t,n,\alpha)$ es par o impar (va a depender del termino t^n), resulta, por simetría, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-\alpha t^2} = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}} & \text{si n es par} \\ 0 & \text{si n es impar.} \end{cases}$$

Se observa claramente que los términos en la integración de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \sum_{j=13}^{40} M_j(x) w^{2j}\, dw$ entregarán un valor bastante pequeño. Notamos, además que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \sum_{j=1}^{39} N_j(x) w^{2j+1} dw = 0$, $\forall j$, dado el hecho que $2j+1$ es impar. Por tanto, en la ecuación (1.22), tenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) \approx & \sqrt{2}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2}dw - \frac{1}{x}\int_{-\infty}^{\infty} w^4 e^{-w^2}dw + \right.\\ & + \left(\frac{4}{9x}-\frac{4}{3x^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty} w^6 e^{-w^2}dw + \left.\frac{32}{2066715x^4}\int_{-\infty}^{\infty} w^{24}e^{-w^2}dw\right]\\ = & \sqrt{2}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}\left[\sqrt{\pi}-\frac{1}{x}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{4}+\left(\frac{4}{9x}-\frac{4}{3x^2}\right)\frac{15\sqrt{\pi}}{8}+\ldots+\right.\\ & + \left.\ldots\frac{32\sqrt{\pi}}{2066715x^4}\cdot\frac{316234143225}{4096}\right] = \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}\left[1-\frac{3}{4x}+\right.\\ & + \left(\frac{4}{9x}-\frac{4}{3x^2}\right)\frac{15}{8}+\left(\frac{47}{30x^2}-\frac{2}{3x^3}\right)\frac{105}{16}-\left(\frac{4}{9x^2}-\right.\\ & - \left.\frac{612}{175x^3}+\frac{16}{5x^4}\right)\frac{945}{32}+\left(\frac{8}{243x^2}-\frac{493}{270x^3}+\frac{6698}{945x^4}\right)\cdot\\ & \cdot\frac{10395}{64}+\left(\frac{154}{405x^3}-\frac{8098}{1575x^4}\right)\frac{135135}{128}-\left(\frac{8}{243x^3}-\right.\\ & - \left.\frac{190261}{113400x^4}\right)\frac{2027025}{265}+\left(\frac{32}{32805x^3}-\frac{1006}{3645x^4}\right)\frac{34459425}{512}+\\ & + \frac{428}{18225x^4}\cdot\frac{654729075}{1024}-\frac{32}{32805x^4}\cdot\frac{13749310575}{2048}+\\ & + \left.\frac{32}{2066715x^4}\cdot\frac{316234143225}{4096}\right]\end{aligned}$$

y simplificando algebraicamente obtenemos:

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{4}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\frac{571}{2488320x^4}\right).$$

Y usando la relación de recurrencia de la función Gamma $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, tenemos que:

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\frac{571}{2488320x^4}+O(x^{-5})),$$

siendo $O(x^{-5})$ el error estimado.

De esta aproximación concluimos que:

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\frac{571}{2488320x^4}+O(x^{-5})).$$

□

Observação. Usando la última expresión con $x = n \in \mathbb{N}$ grande tenemos:

$$\Gamma(n) \approx \sqrt{2\pi} n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

1.2.6 Fórmula de Multiplicación de Gauss

Otra propiedad de la función Gamma, que es de utilidad, se resume en la fórmula de multiplicación de Gauss:

Teorema 1.2.33.

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nx} \Gamma(nx) \quad \forall x \notin \left(-\frac{m}{n}; m \in \mathbb{N}\right).$$

Prueba. Usando la fórmula de recurrencia de la función Gamma tenemos que:

$$\Gamma\left(x + \frac{k}{n}\right) = \Gamma\left(x + \frac{k}{n} - 1 + 1\right) = \left(x + \frac{k}{n} - 1\right) \Gamma\left(x + \frac{k}{n} - 1\right).$$

Por otro lado, usando el límite de Gauss sabemos que

$$\Gamma(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{m! m^x}{x(x+1)\cdots(x+m)},$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(x + \frac{k}{n}\right) &= \left(x + \frac{k}{n} - 1\right) \lim_{m\to\infty} \frac{m! m^{x+\frac{k}{n}-1}}{\left(x + \frac{k}{n} - 1\right)\cdots\left(x + \frac{k}{n} + m - 1\right)} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{m! m^{x+\frac{k}{n}-1}}{\left(x + \frac{k}{n}\right)\cdots\left(x + \frac{k}{n} + m - 1\right)}
\end{aligned}$$

y usando la aproximación de Stirling–De Moivre, tenemos:

$$\begin{aligned}
m! = \Gamma(m+1) &\approx \sqrt{2\pi} (m+1)^{m+\frac{1}{2}} e^{-(m+1)} \\
&= \sqrt{2\pi} m^{m+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m}\right) e^{-m-1},
\end{aligned}$$

por lo que:

$$\Gamma\left(x + \frac{k}{n}\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi} m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m} m^{x+\frac{k}{n}-1}}{\left(\frac{nx+k}{n}\right)\left(\frac{nx+k+n}{n}\right)\cdots\left(\frac{nx+k+nm-n}{n}\right)},$$

de donde:

$$\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}m^m e^{-m} m^{x+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}} n^m}{(nx+k)(nx+k+n)\cdots(nx+k+nm-n)}.$$

Ahora, si multiplicamos estas expresiones desde $k=0$ hasta $k=n-1$ tenemos:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{2\pi})^n m^{mn} e^{-mn} m^{nx-\frac{n}{2}}}{(nx)(nx+n)\cdots(nx+nm-n)}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{m^{nx-\frac{n}{2}} m^{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}} n^{mn}}{(nx+1)\cdots(nx+n-1+nm-n)}\right),$$

esto es:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{(\sqrt{2\pi})^n (mn)^{mn} e^{-mn} m^{nx-\frac{n}{2}} m^{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}}}{(nx)(nx+1)\cdots\cdots(nx+n-1+nm-n)}.$$

Además, dado que $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}$ es una suma de términos en progresión aritmética, tenemos $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}=\frac{n-1}{2}$ y, entonces:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{(\sqrt{2\pi})^n (mn)^{mn} e^{-mn} m^{nx-\frac{n}{2}} m^{\frac{n-1}{2}}}{(nx)(nx+1)\cdots(nx+n-1+nm-n)},$$

por lo que:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{(\sqrt{2\pi})^n (mn)^{mn} e^{-mn} m^{nx-\frac{1}{2}}}{(nx)(nx+1)\cdots(nx+n-1+nm-n)}.$$

Ahora, haciendo la sustitución $mn\to m$, obtenemos:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{(\sqrt{2\pi})^n m^m e^{-m}\left(\frac{m}{n}\right)^{nx-\frac{1}{2}}}{(nx)(nx+1)\cdots(nx+m-1)}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{(\sqrt{2\pi})^n m^m e^{-m} m^{nx-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nx}}{(nx)(nx+1)\cdots(nx+m-1)}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{2\pi}m^{m+\frac{1}{2}}e^{-m}m^{nx-1}n^{\frac{1}{2}-nx}}{(nx)(nx+1)\cdots(nx+m-1)}$$

y como $\lim_{m\to\infty} \sqrt{2\pi}m^{m+\frac{1}{2}}e^{-m} = m!$, entonces:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}m!m^{nx-1}n^{\frac{1}{2}-nx}}{(nx)(nx+1)\cdots(nx+m-1)} \to$$

$$\to= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nx} \lim_{m\to\infty} \frac{m!m^{nx-1}}{nx(nx+1)\cdots(nx+m-1)} \to$$

$$\to= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nx} \lim_{m\to\infty} \frac{m!m^{nx-1}}{nx(nx+1)\cdots(nx+m-1)} \cdot \frac{(nx-1)}{(nx-1)}$$

$$\to= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nx}(nx-1) \lim_{m\to\infty} \frac{m!m^{nx-1}}{(nx-1)nx(nx+1)\cdots(nx+m-1)}.$$

Usando, nuevamente, el límite de Gauss, tenemos:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right) = \lim_{m\to\infty} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nx}(nx-1)\Gamma(nx-1),$$

por lo tanto,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}-nx}\,\Gamma(nx)$$

para todo $x \notin \left(-\frac{m}{n}; m\in\mathbb{N}\right)$, como anunciado. □

1.2.7 Función Digamma

Una herramienta para calcular la derivada de la función Gamma es la función digamma o también llamada función psi Artin (1964).

Definición 1.2.5. Se llama función digamma, denotada por $\Psi(x)$, a la función $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, para $x \neq 0, -1, -2, \ldots$.

De la fórmula de Weierstrass: $\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$, aplicando logaritmo natural en ambos lados tenemos:

$$-\ln(\Gamma(x)) = \ln(x) + \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right];$$

derivando esta expresión, con respecto a x, tenemos:

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(1+\frac{x}{n})} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right),$$

entonces

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

$$\Psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1} + \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{n+x}\right)$$

$$\Psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{n+x}}_{\text{telescópica}}\right)$$

$$\Psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}\right),$$

por lo tanto,

$$\Psi(x) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x-1}{n(x+n-1)}.$$

En el cálculo anterior hemos supuesto que $\Gamma(x) > 0$ (para tomar el logaritmo). Es fácil verificar que la misma expresión es valida para el caso en que $\Gamma(x) < 0$. En efecto, en esté caso usamos la expresión:

$$-\frac{1}{\Gamma(x)} = (-x)e^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}.$$

Por tanto, el cálculo vale para $x \neq 0, -1, -2, \ldots$

Al igual que la función Gamma, la función digamma tiene varias propiedades interesantes, como su propia fórmula de recurrencia, diferentes representaciones integrales, fórmula de reflexión, etc.

Proposición 1.2.34. *(Fórmula de recurrencia para la función digamma): Para* $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ *tenemos que :*

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}.$$

Prueba. Ocupamos la fórmula de recurrencia de la función Gamma:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

aplicando logaritmo natural en ambos lados de la igualdad y luego derivando con respecto a x, tenemos que:

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x},$$

por lo tanto,

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}.$$

□

Proposición 1.2.35. *(Fórmula de reflexión para la función digamma): Para $x \notin \mathbb{Z}$ tenemos que :*

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x).$$

Prueba. Ocupamos la fórmula de reflexión de Euler para la función Gamma:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)},$$

aplicando logaritmo natural en ambos lados de la igualdad y luego derivando con respecto a x, tenemos que:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = -\frac{\pi \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)},$$

por lo tanto,

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x).$$

□

Proposición 1.2.36. *(Fórmula de duplicación para la función digamma): Para $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ tenemos que :*

$$2\Psi(2x) = 2\ln(2) + \Psi(x) + \Psi\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Prueba. Ocupamos la fórmula de duplicación para la función Gamma:

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}},$$

aplicando logaritmo natural en ambos lados de la igualdad y luego derivando con respecto

a x, tenemos que:

$$2\frac{\Gamma'(2x)}{\Gamma(2x)} = 2\ln(2) + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{\Gamma'\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)},$$

por lo tanto,

$$2\Psi(2x) = 2\ln(2) + \Psi(x) + \Psi\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

□

Proposición 1.2.37. *(Fórmula de multiplicación para la función digamma): Para* $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ *se cumple que*

$$\Psi(nx) = \ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Psi\left(x+\frac{k}{n}\right).$$

Prueba. De la fórmula de multiplicación de Gauss para la función Gamma tenemos:

$$\Gamma(nx) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nx-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right),$$

aplicando logaritmo natural en ambos lados de la igualdad y luego derivando con respecto a x, obtenemos que:

$$n\frac{\Gamma'(nx)}{\Gamma(nx)} = n\ln(n) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(x+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)},$$

por lo tanto,

$$\Psi(nx) = \ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Psi\left(x+\frac{k}{n}\right).$$

□

Otras Representaciones de la Función Digamma

La función digamma, al igual que la función Gamma, tiene otras representaciones, como las siguientes:

Teorema 1.2.38. *Para* $x > 0$*, tenemos:*

a) $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{t}\left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x}\right)dt$ *(Dirichlet)*

b) $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)dt$ *(Gauss)*

Prueba. a) Evaluamos la integral doble:

$$\int_1^s \int_0^{\infty} e^{-tx}\,dt\,dx = \int_0^{\infty}\int_1^s e^{-tx}\,dt\,dx.$$

Evaluando la integral del lado izquierdo tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_1^s \int_0^{\infty} e^{-tx}\,dt\,dx &= \int_1^s \lim_{w\to\infty}\int_0^{w} e^{-tx}\,dt\,dx \\
&= \int_1^s \left[\lim_{w\to\infty}\left(-\frac{e^{-tx}}{x}\right)\Bigg|_0^{w}\right]dx \\
&= \int_1^s \left[\lim_{w\to\infty}\left(-\frac{e^{-wx}}{x} + \frac{1}{x}\right)\right]dx \\
&= \int_1^s \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_1^s = \ln(s)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Evaluando la integral del lado derecho:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_1^s e^{-tx}\,dt\,dx &= \int_0^{\infty}\left(-\frac{e^{-tx}}{x}\Bigg|_1^s\right)dx \\
&= \int_0^{\infty}\left(-\frac{e^{-sx}}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right)dx.
\end{aligned}$$

Usando la igualdad (1.24), en la integral anterior, tenemos:

$$\int_0^{\infty}\int_1^s e^{-tx}\,dt\,dx = \int_0^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-sx}}{x}\,dx = \ln(s). \tag{1.25}$$

Ahora, usando (1.25), calculamos la integral doble:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s^{x-1}\cdot\frac{e^{-s-t}-e^{-s(1+t)}}{t}\,ds\,dt.$$

Para ello, integramos primero con respecto a t:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s^{x-1}\cdot\frac{e^{-s-t}-e^{-s(1+t)}}{t}\,dt\,ds &= \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s^{x-1}e^{-s}\left(\frac{e^{-t}-e^{-st}}{t}\right)dt\,ds
\end{aligned}$$

y por (1.25), tenemos que:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}\left(\frac{e^{-t}-e^{-st}}{t}\right)dt\,ds = \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}\ln(s)ds = \Gamma'(x). \tag{1.26}$$

Ahora integrando la integral doble con respecto a s tenemos:

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{s^{x-1}e^{-s}}{t}(e^{-t}-e^{-st})ds\,dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}\frac{e^{-t}}{t}ds\,dt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{s^{x-1}e^{-s}e^{-st}}{t}ds\,dt}_{I_2}.$$

En I_1 tenemos que: $\displaystyle\int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}ds = \Gamma(x)$; y para evaluar I_2 usamos el cambio de variable $s(1+t) = u$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
I =&\Gamma(x)\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{u}{(1+t)}\right)^{x-1} e^{-u}\frac{du}{t(1+t)}du\,dt \\
=&\Gamma(x)\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_0^\infty \frac{\Gamma(x)}{t(1+t)^x}dt \\
=&\Gamma(x)\int_0^\infty \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x}\right)dt
\end{aligned} \tag{1.27}$$

y como (1.26) y (1.27) son iguales, entonces:

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\int_0^\infty \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x}\right)dt,$$

por lo tanto,

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x}\right)dt.$$

b) De a) tenemos que:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x}\right) dt \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\ln(1+\epsilon)}^{\infty} \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x}\right) dt \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{\ln(1+\epsilon)}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\ln(1+\epsilon)}^{\infty} \frac{e^u du}{(e^u - 1)e^{ux}}\right)\end{aligned}$$

para la segunda integral usamos el cambio de variable $1 + t = e^u$, entonces

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{\ln(1+\epsilon)}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\ln(1+\epsilon)}^{\infty} \frac{e^u du}{(e^u - 1)e^{ux}}\right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{\ln(1+\epsilon)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{\ln(1+\epsilon)}^{\infty} \frac{e^{-ux} du}{(e^u - 1)\cdot \frac{1}{e^u}}\right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{\ln(1+\epsilon)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{\ln(1+\epsilon)}^{\infty} \frac{e^{-ux}}{1 - e^{-u}} du\right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{\ln(1+\epsilon)}^{\infty} \left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-ux}}{1 - e^{-u}}\right) du\right]\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\Psi(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}}\right) dt.$$

□

Aproximación de la Función Digamma

Al igual que con la aproximación de Stirling–De Moivre de la función Gamma, se puede encontrar una aproximación asintótica de la función digamma.

Para esto introduciremos los polinomios de Bernoulli, a saber: la sucesión $\{B_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ definida por las condiciones:

- $B_0(x) = 1.$
- $B_n'(x) = nB_{n-1}'(x), n \geqslant 1$ y
- $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)dx = 0, n = 0, 1, 2, \ldots$

Notamos que $B_1'(x) = 1$ y entonces $B_1(x) = x + c$. La condición $\int_0^1 B_1(x)dx = 0$

implica $\int_0^1 (x+c)dx = 0$ y $\left(\frac{x^2}{2}+cx\right)\Big|_0^1 = 0$. Esto es, $\frac{1}{2}+c=0$ o $c=-\frac{1}{2}$. Por tanto, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

Procediendo de manera similar para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ tenemos:

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}; \qquad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2};$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}; \qquad B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{x}{6} \text{ y}$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.$$

Observamos que $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$, para todo $n \geqslant 0$ y que $B_{2n}(0) = B_{2n}(1) = B_{2n}$, para todo $n \geqslant 1$.
Usando estos polinomios calcularemos, dada una función diferenciable $f(x)$, el valor $\int_0^1 f(x)dx$.
Tenemos $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)B_0(x)dx = \int_0^1 f(x)B_1'(x)dx$. Integrando por partes tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)B_1'(x)dx \\
&= f(x)B_1(x)|_0^1 - \int_0^1 f'(x)B_1(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)B_2'(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{1}{2}\left[f'(x)B_2(x)|_0^1 - \int_0^1 f''(x)B_2(x)dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{1}{2}\left[f'(1)-f'(0)\right]B_2(0) + \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^1 f''(x)\cdot\frac{1}{3}B_3(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{B_2(0)}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right) + \\
&+ \frac{1}{6}\int_0^1 f''(x)B_3'(x)dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{B_2}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right) + \frac{1}{6}\Big[f''(x)B_3(x)\Big|_0^1 - \\
&- \int_0^1 f'''(x)B_3(x)dx \Big] \\
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{B_2}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right) - \frac{1}{6}\int_0^1 f'''(x)B_3(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{B_2}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right) - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\int_0^1 f'''(x)B_4'(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{B_2}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right) - \frac{1}{24}\Big[f'''(x)B_4(x)\Big|_0^1 - \\
&\quad - \int_0^1 f^{(iv)}(x)B_4(x)dx \Big] \\
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{B_2}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right) - \frac{B_4}{24}\left(f'''(1)-f'''(0)\right) + \\
&+ \frac{1}{120}\int_0^1 f^{(iv)}(x)B_5'(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{B_2}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right) - \frac{B_4}{24}\left(f'''(1)-f'''(0)\right) + \\
&+ \frac{1}{120}\left[f^{(iv)}(x)B_5(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f^{(v)}(x)B_5(x)dx \right] \\
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{B_2}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right) - \frac{B_4}{24}\left(f'''(1)-f'''(0)\right) - \\
&- \frac{1}{720}\int_0^1 f^{(v)}(x)B_6'(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{B_2}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right) - \frac{B_4}{24}\left(f'''(1)-f'''(0)\right) - \\
&- \frac{1}{720}\left[f^{(v)}(x)B_6(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f^{(vi)}(x)B_6(x)dx \right] \\
&= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{B_2}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right) - \frac{B_4}{24}\left(f'''(1)-f'''(0)\right) - \\
&- \frac{B_6}{720}\left(f^{(v)}(1)-f^{(v)}(0)\right) + \frac{1}{720}\int_0^1 f^{(vi)}(x)B_6(x)dx
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente para obtener la relación:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}[f(1)+f(0)] - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right] + \\ + \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{(2n)}(x) B_{2n}(x)dx.$$

Ahora si reemplazamos $f(x)$ por $f(x+1)$ tenemos $\int_0^1 f(x+1)dx = \int_1^2 f(u)du$. Por tanto, podemos hacer el cálculo anterior con $g(x) = f(x+1)$ para obtener:

$$\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}[g(1)+g(0)] - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[g^{(2k-1)}(1) - g^{(2k-1)}(0)\right] + \\ + \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 g^{(2n)}(x) B_{2n}(x)dx,$$

esto es:

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}[f(2)+f(1)] - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(2) - f^{(2k-1)}(1)\right] + \\ + \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{(2n)}(x+1) B_{2n}(x)dx.$$

A partir de los cálculos para $\int_0^1 dx$ y $\int_1^2 f(x)dx$ tenemos

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}f(0) + f(1) + \frac{1}{2}f(2) - \\ - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(2) - f^{(2k-1)}(0)\right] + \\ + \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{(2n)}(x+1) B_{2n}(x)dx.$$

Podemos continuar para calcular $\int_{m-1}^{m} f(x)dx$ como $\int_0^1 f(x+m)dx$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^m f(x)dx =& \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \dots \frac{1}{2}f(m) - \\ &-\sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(m) - f^{(2k-1)}(0)\right] + \\ &+\frac{1}{(2n)!}\int_0^m B_{2n}\Sigma_{k=0}^{m-1} f^{(2n)}(x+k)(x)dx.\end{aligned}$$

Esta última ecuación recibe el nombre de **fórmula de suma de Euler-MacLaurin** Fernandez (2008).

Aplicamos lo anterior a la función: $f(x) = \dfrac{1}{(z+x)^2}$ y tenemos que:

$$\int_0^m f(x)dx = \int_0^m \frac{dx}{(z+x)^2} = -\frac{1}{z+x}\bigg|_0^m = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+m}.$$

Así, usando la fórmula de la suma de Euler-MacLaurin, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} - \frac{1}{z+m} =& \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + f(m-1) + \frac{1}{2}f(m) - \\ &-\sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(m) - f^{(2k-1)}(0)\right) + \\ &+\frac{1}{(2n)!}\int_0^1 B_{2n}(x)\sum_{k=0}^{n-1} f^{(2n)}(x+k)dx =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\frac{1}{2z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \dots + \frac{1}{(z+m-1)^2} + \frac{1}{(z+m-1)^2} - \\ &-\sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{(-1)(2k)!}{(z+m)^{2k+1}} - \frac{(-1)(2k)!}{z^{2k+1}}\right) + \\ &+\frac{1}{(2n)!}\int_0^1 B_{2n}(x)\sum_{k=0}^{n-1} f^{(2n)}(x+k)dx.\end{aligned}$$

Considerando $n \geqslant m$ y haciendo $n \to \infty$ tenemos:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{z^{2k+1}}.$$

Ahora podemos establecer el siguiente resultado:

Proposición 1.2.39. *(Aproximación de la función digamma) Para $z \neq 0, -1, -1, -3, \cdots$ tenemos:*

$$\Psi(z) \approx \ln(z) - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{240z^4} + O(z^{-6}).$$

Prueba. De la sección 1.2.7, consideramos la expresión de la función digamma:

$$\Psi(z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n-1} \right).$$

Derivando, con respecto a z, tenemos que:

$$\Psi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n-1)^2}, \text{ entonces } \Psi'(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

De esta forma, tenemos:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{z^{2n+1}}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2z^2} + \Psi'(z+1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{z^{2n+1}},$$

entonces $\Psi'(z+1) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{z^{2n+1}}$ e integrando esta última expresión con respecto a z, nos da que:

$$\Psi(z+1) = \ln(z) + \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2nz^{2n}} + C_1.$$

Se puede probar (ver Arfken y Weber (2001)) que $C_1 = 0$, por lo que:

$$\Psi(z+1) = \ln(z) + \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2nz^{2n}}.$$

Así, usando la fórmula de recurrencia de la función digamma:

$$\Psi(z+1) = \Psi(z) + \frac{1}{z}$$

obtenemos que:

$$\Psi(z) = \ln(z) - \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2nz^{2n}}$$

y considerando los números de Bernoulli $B_2 = \frac{1}{6}$ y $B_4 = -\frac{1}{30}$, tenemos:

$$\Psi(z) \approx \ln(z) - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{240z^4} + O(z^{-6}),$$

que es la aproximación que queríamos encontrar para la función digamma. □

1.2.8 Función Polygamma

Las diversas derivadas de la función digamma generan funciones conocidas como las funciones polygamma.

Definición 1.2.6. La n-ésima derivada de la función digamma para $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ es:

$$\Psi^{(n)}(x) = \Psi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\Psi(x).$$

Al igual que la función Gamma, digamma, esta función tiene varias propiedades interesantes.

Proposición 1.2.40. *Para $x \neq 0, -1, -2, \ldots$, tenemos que:*

$$\Psi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^{n+1}}$$

para $n = 1, 2, \ldots$

Prueba. De la definición de la función digamma y derivando con respecto a x tenemos

que:

$$\Psi(x) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x-1}\right)$$

$$\Psi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x-1}\right)$$

$$\Psi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x-1)^2};$$

derivando nuevamente, con respecto a x, tenemos:

$$\Psi''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+x-1)^3};$$

derivando esta segunda derivada, con respecto a x, obtenemos:

$$\Psi'''(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{(k+x-1)^4},$$

por lo tanto, tenemos que:

$$\Psi^{(n)}(x) = \Psi_n(x) = (-1)^{n+1}n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^{n+1}}$$

para $n = 1, 2, \ldots$ □

Proposición 1.2.41. *(Fórmula de recurrencia para la función polygamma): Para* $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ *tenemos que :*

$$\Psi_n(x+1) = \Psi_n(x) + \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Prueba. Usando la fórmula de recurrencia de la función digamma, tenemos que:

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}$$

derivando con respecto a x tenemos que:

$$\Psi'(x+1) = \Psi'(x) - \frac{1}{x^2}$$

derivando nuevamente con respecto a x, nos da que:

$$\Psi''(x+1) = \Psi''(x) + \frac{2}{x^3},$$

por lo tanto,

$$\Psi_n(x+1) = \Psi_n(x) + \frac{(-1)^{n+1} n!}{x^{n+1}}$$

para $n = 1, 2, \ldots$ □

Proposición 1.2.42. *(Fórmula de reflexión para la función polygamma): Para* $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ *tenemos que :*

$$\Psi_n(1-x) + (-1)^{n+1}\Psi_n(x) = (-1)^n \pi \frac{d^n}{dx^n}(\cot(\pi x)).$$

Prueba. Usando la fórmula de reflexión de la función digamma, tenemos que:

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x)$$

derivando con respecto a x, nos da que:

$$\Psi'(1-x) + \Psi'(x) = -\pi \frac{d}{dx}(\cot(\pi x))$$

derivando nuevamente por x, tenemos que:

$$\Psi''(1-x) - \Psi''(x) = \pi \frac{d^2}{dx^2}(\cot(\pi x)),$$

por lo tanto,

$$\Psi_n(1-x) + (-1)^{n+1}\Psi_n(x) = (-1)^n \pi \frac{d^n}{dx^n}(\cot(\pi x))$$

para $n = 1, 2, \ldots$ □

Proposición 1.2.43. *(Fórmula de multiplicación para la función poligamma): Para* $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ *y* $m \geqslant 1$ *se cumple que*

$$\Psi^{(m)}(nx) = \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \Psi^{(m)}\left(x + \frac{k}{n}\right).$$

Prueba. De la fórmula de multiplicación de la función digamma tenemos que:

$$\Psi(nx) = \ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \Psi\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

derivando con respecto a x, tenemos que:

$$\Psi'(nx) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} \Psi'\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

derivando nuevamente con respecto a x, nos da que:

$$\Psi''(nx) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} \Psi''\left(x + \frac{k}{n}\right),$$

por lo tanto,

$$\Psi^{(m)}(nx) = \frac{1}{n^{m+1}}\sum_{k=0}^{n-1} \Psi^{(m)}\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

para $m = 1, 2, \ldots$ □

1.2.9 Función Gamma en el Plano Complejo

Hasta el momento hemos estudiado a la función Gamma considerando, como su dominio de definición, el conjunto de los números reales, al que hemos sacado los enteros no positivos. Según Davis (1959) *la función Gamma es una función de una variable real en el sentido en que muchas de sus importantes propiedades funcionan con esta teoría.* Sin embargo, y ya en los primeros trabajos sobre esta función, se trato de extenderla a los números complejos, pero sin mucho resultado. En esta sección ampliaremos el dominio de la función Gamma hacia el plano complejo.

La historia indica que Euler fue pionero en el análisis complejo pero, parece no haber considerado la posibilidad de definir el factorial de un número complejo. De acuerdo con Davis (ibíd.), la extensión al plano complejo fue iniciado por Gauss y Legendre entregando tablas de la función Gamma para valores reales. Entretanto, no fue hasta 1909 que Jahnke, Emde y Lösch (1960), basándose en estas tablas, esbozaron un gráfico en tres dimensiones de la función Gamma con dominio en el plano complejo:

El gráfico anterior representa el gráfico de la función $z \to |\Gamma(z)|$, para $z \neq, 0, -1, -2.-3, \cdots,$

Fue por mediados de 1930 que la función Gamma tuvo aplicaciones en la física teórica y en 1950, ahora usando computadores, se publicaron algunas tablas de valores de la función Gamma en el plano complejo.

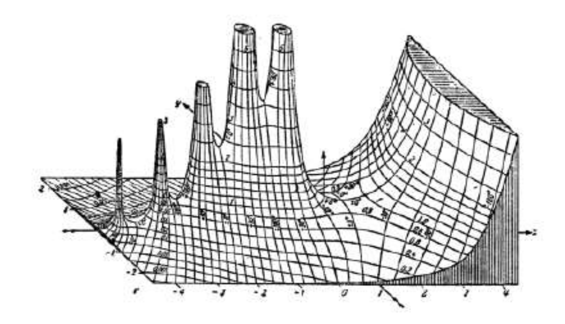


Figura 1.5: Gráfico del módulo de la Función Gamma en el plano complejo por Jahnke y Emde en 1948

Si extendemos la integral de Euler a los números complejos, específicamente el lado derecho del plano complejo, tenemos:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \qquad (Re(z) > 0)$$

esta función, con términos complejos, coincide con la definición de la función Gamma con dominio real.

Usando el limite de Euler y el producto de Weiertrass podemos extender la definición para el plano complejo, excepto para los enteros no-positivos. Para la extensión de la función Gamma, en el dominio complejo, probaremos que tiene como polos simples los enteros no positivos. A saber:

Teorema 1.2.44. *Para $z \in \mathbb{C}$, la función $\Gamma(z)$ tiene como polos simples a $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ y con residuo $Res(\Gamma, -n) = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.*

Prueba. Sea $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, notemos que si expandimos la función e^{-t} como serie de Taylor, centrada en 0, es $e^{-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$,

tenemos que:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+z-1}}{n!} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{t^{n+z}}{n+z} \right]_0^1 \right\} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

La integral $\nu(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ define una función analítica de la variable z y, por tanto, aplicando el teorema de residuos, tenemos que:

$$Res(\Gamma, -n) = \lim_{z \to -n} (z - (-n))\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, n \in \mathbb{N}_0.$$

Concluimos que $\Gamma(z)$ es una función definida en los números complejos menos los enteros no positivos, con polos simples en esos puntos y, dado este hecho, la función Gamma es analítica en el plano complejo menos los enteros no positivos. □

Para ver más propiedades de a función Gamma en el plano complejo, recomendamos ver los ejercicios.

1.2.10 La Función Gamma Incompleta

Para definir la función Gamma usamos una integral evaluada en el intervalo $]0, \infty[$ podemos, escogiendo x, con $0 < x < \infty$, dividirla en dos integrales, evaluadas en $]0, x[$ y $]x, \infty[$ y, con ello, definir las funciones $\gamma(a, x)$ y $\Gamma(a, x)$ por:

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt; \quad \Re(a) > 0$$

y

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt.$$

Estas dos últimas funciones están relacionadas con la función Gamma por:

$$\Gamma(a) = \gamma(a,x) + \Gamma(a,x).$$

Para el caso de que el parámetro a es un número entero positivo, tenemos:

Proposición 1.2.45. *Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple:*

$$\gamma(n,x) = (n-1)!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right).$$

Prueba. Sea $\gamma(n,x) = \int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt$, si integramos por partes con $u = t^{n-1}$ y $dv = e^{-t}dt$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\gamma(n,x) &= \int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt\\ &= -t^{n-1}e^{-t}\Big|_0^x + (n-1)\int_0^x t^{n-2}e^{-t}dt\\ &= -x^{n-1}e^{-x} + (n-1)\int_0^x t^{n-2}e^{-t}dt.\end{aligned}$$

Recursivamente:

$$\gamma(n,x) = -x^{n-1}e^{-x} - (n-1)x^{n-2}e^{-x} - \ldots - (n-1)!xe^{-x} + (n-1)!(-e^{-x}+1)$$

por lo que que:

$$\gamma(n,x) = (n-1)!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right),$$

como señalado.

□

Proposición 1.2.46. *Para $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos:*

$$\Gamma(n,x) = (n-1)!e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}.$$

Prueba. Integrando por partes, al igual que en el caso anterior, tenemos para: $u = t^{n-1}$ y

$dv = e^{-t}dt$, entonces

$$\Gamma(n,x) = -t^{n-1}e^{-t}\Big|_x^{\infty} + (n-1)\int_x^{\infty} t^{n-2}e^{-t}dt$$
$$= x^{n-1}e^{-x} + (n-1)\int_x^{\infty} t^{n-2}e^{-t}dt.$$

Recursivamente llegamos a:

$$\Gamma(n,x) = x^{n-1}e^{-x} + (n-1)x^{n-2}e^{-x} + \ldots + (n-1)!e^{-x}$$

por lo que:

$$\Gamma(n,x) = (n-1)!e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!},$$

como afirmado. □

1.3 Aplicaciones de la Función Gamma

En sus diferentes representaciones (límite, producto infinito e integrales), la función Gamma puede ser, y a veces es, una importante herramienta a la hora de hacer diferentes cálculos. Ya vimos cómo se gestó la función Gamma y señalamos sus principales propiedades, ahora presentaremos algunas aplicaciones.

1.3.1 Para el Cálculo de Integrales

Algunas integrales lucen bastantes intimidantes, pero se vuelven más amigables si aplicamos de manera asertiva la función Gamma (o la función beta). Daremos algúnos ejemplos ilustrativos y muy detallados que recopilamos de Attar (2006) y Farrell y Ross (1971).

Ejemplo 1.3.1. Calculamos la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3e^{-2x}dx$.

Usando la proposición 1.2.21 sabemos que: $\Gamma(x) = a^x\displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-at}dt$. Evaluando para $a = 2$ y $x = 4$, tenemos:

$$\Gamma(4) = 2^4\int_0^{\infty} x^3e^{-2x}dt,$$

entonces

$$\int_0^{\infty} x^3e^{-2x}dt = \frac{\Gamma(4)}{2^4} = \frac{3!}{16} = \frac{3}{8}.$$

Ejemplo 1.3.2. Probar que: $\int_0^1 x^m(\ln(x))^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, para $n, m \in \mathbb{N}$.

En este caso usamos el cambio de variable $u = -\ln(x)$, entonces reemplazando en la integral, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_\infty^0 (e^{-u})^m(-u)^n \cdot -e^{-u} du =& -\int_0^\infty e^{-um}(-1)^n \cdot -1 \cdot u^n e^{-u} du \\ =& (-1)^n \int_0^\infty u^n e^{-(m+1)u} du\end{aligned}$$

y usando nuevamente la proposición 1.2.21 para $x = n+1$ y $a = m+1$, tenemos:

$$\Gamma(n+1) = (m+1)^{n+1}\int_0^\infty t^n e^{-(m+1)t} dt = (m+1)^{n+1}\int_0^\infty u^n e^{-(m+1)u} du.$$

Por tanto, y ya que $\int_0^\infty u^n e^{-(m+1)u} du = (-1)^n \int_0^1 x^m(\ln(x))^n dx$, entonces $\Gamma(n+1) = (m+1)^{n+1}(-1)^n \int_0^1 x^m(\ln(x))^n dx$ y ya que $\Gamma(n+1) = n!$ obtenemos:

$$\int_0^1 x^m(\ln(x))^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

como pedido.

Ejemplo 1.3.3. Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln(x)}}$.

Para este cálculo usamos, nuevamente, el cambio de variable $u = -\ln(x)$ y reemplazando en la integral tenemos que:

$$\int_\infty^0 \frac{-e^{-u} du}{u^{\frac{1}{2}}} = \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

esto es:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln(x)}} = \sqrt{\pi}.$$

Ejemplo 1.3.4. Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right)^{\frac{1}{4}} \cos(x) dx$.
Haciendo la diferencia del paréntesis, tenemos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right)^{\frac{1}{4}} \cos(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\sin(x)}{\sin^3(x)}\right)^{\frac{1}{4}} \cos(x) dx.$$

Usando el cambio de variable $u = 1 - \sin(x)$ y reemplazando en la integral tenemos:

$$\int_1^0 \left(\frac{u}{(1-u)^3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot -du = \int_0^1 u^{\frac{1}{4}}(1-u)^{-\frac{3}{4}} du.$$

Usando la definición 1.2.4 de la función beta, $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$; con los valores $x = \frac{5}{4}$ y $y = \frac{1}{4}$, y la proposición 1.2.28 obtenemos que:

$$\beta(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4}+\frac{1}{4})} = \int_0^1 u^{\frac{1}{4}}(1-u)^{-\frac{3}{4}} du.$$

Ahora usando la proposición 1.2.3 y la proposición 1.2.7 tenemos $\Gamma(\frac{5}{4}) = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})$ y $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, entonces

$$\int_0^1 u^{\frac{1}{4}}(1-u)^{-\frac{3}{4}} du = \frac{\frac{1}{4}\cdot\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\left[\Gamma(\frac{1}{4})\right]^2}{2\sqrt{\pi}},$$

por lo tanto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right)^{\frac{1}{4}} \cos(x)dx = \frac{\left[\Gamma(\frac{1}{4})\right]^2}{2\sqrt{\pi}}.$$

1.3.2 Volumen y Área de una Bola y una Esfera en Dimensión n

Una bola n-dimensional de radio R, consiste en el lugar geométrico de los puntos, del espacio euclidiano de dimensión n, cuya distancia al origen es menor o igual a R. Recordemos que las coordenadas de un punto en el espacio euclidiano de dimensión n, es la n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. En forma de ecuación, la bola n-dimensional de radio R corresponde al conjunto de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tales que:

$$x_1^{2+} + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant R^2. \tag{1.28}$$

Para calcular su volumen, integramos infinitesimalmente el elemento de volumen $dV = dx_1 \ldots dx_n$ sobre la región de n-dimensiones , indicado en (1.28). Entonces el volumen de la bola, $V_n(R)$, será:

$$V_n(R) = \int \cdots \int_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = C_n R^n \tag{1.29}$$

donde C_n será una constante a determinar.

Ahora, si consideramos la bola n-dimensional como un conjunto de capas (cáscaras) concéntricas, entonces tenemos que el elemento de volumen dV_n de la capa de radio R y

cuyo espesor es dR está relacionado con el área $A_n(R)$ de la esfera $(n-1)$-dimensional por $dV_n(R) = A_n dR$, entonces

$$A_n(R) = \frac{dV_n}{dR} = nC_n R^{n-1}. \tag{1.30}$$

Veamos una manera, usando a la función Gamma, de calcular el valor de la constante C_n. Para ello, consideremos la función:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)} = e^{-R^2}$$

si integramos esta función sobre las n-dimensiones, obtenemos:

$$\int_0^\infty e^{-R^2} dV_n = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

de la ecuación (1.30), tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-R^2} A_n dR &= \int_0^\infty e^{-R^2} nC_n R^{n-1} dR \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n\end{aligned}$$

por tanto, obtenemos:

$$nC_n \int_0^\infty e^{-R^2} R^{n-1} dR = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_n^2}. \tag{1.31}$$

Ahora reemplazando en el lado derecho y lado izquierdo de la ecuación (1.31) por la proposición 1.2.6 y la observación (reemplazando x por $\frac{x}{2}$) respectivamente, obtenemos que:

$$\frac{nC_n \Gamma(\frac{n}{2})}{2} = \pi^{\frac{n}{2}},$$

entonces

$$C_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Por lo tanto de la ecuación (1.29), tenemos que:

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n.$$

Asimismo, sabemos de la ecuación (1.30), que el área de una esfera $(n-1)-$dimensional,

denotada por $A_n(R)$, es:

$$\frac{d}{dR}(V_n(R)) = A_n(R),$$

entonces

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{\pi^{\frac{n}{2}}R^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\right) = \frac{nR^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{nR^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}R^{n-1},$$

por lo tanto:

$$A_n(R) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}R^{n-1}.$$

Un segundo método, para calcular el volumen de una bola n-dimensional, es hacer el cálculo de forma directa por medio de un cambio de coordenadas -en el espacio euclidiano n-dimensional- de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas.

Así, para calcular la integral de la ecuación (1.29): usamos el cambio de coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}
x_1 &= R\cos(\phi_1)\\
x_2 &= R\sin(\phi_1)\cos(\phi_2)\\
x_3 &= R\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_3)\\
x_4 &= R\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\sin(\phi_3)\cos(\phi_4)\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= R\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-2})\cos(\phi_{n-1})\\
x_n &= R\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-1}).
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$.

Al hacer este cambio de coordenadas, la integral en (1.29), queda de la forma:

$$\begin{aligned}
V_n(R) &= \int\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2} dx_1dx_2\ldots dx_n\\
&= \int\cdots\int |J|dRd\phi_1d\phi_2\cdots d\phi_{n-1}
\end{aligned} \tag{1.32}$$

donde J es el correspondiente Jacobiano al usar el cambio de coordenadas.

Observação. Las nuevas coordenadas corresponden al radio R y a las $n-1$ coordenadas angulares, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$, donde los ángulos $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-2} \in [0, \pi[$ y $\phi_{n-1} \in [0, 2\pi[$ radianes.

Ahora, el Jacobiano de la transformación es:

$$J = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial(R,\phi_j)}\right) \quad \text{con } j = 1,\ldots,n-1; i = 1,\ldots,n;$$

no es difícil verificar que:

$$J = R^{n-1}\sin^{n-2}(\phi_1)\sin^{n-3}(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-2}),$$

entonces reemplazando en (1.32), tenemos:

$$\begin{aligned} V_n(R) &= \int\cdots\int R^{n-1}\sin^{n-2}(\phi_1)\cdots\sin(\phi_{n-2})dRd\phi_1 d\phi_2\cdots d\phi_{n-1} \\ &= \int_0^R R^{n-1}dR\int_0^{\pi}\sin^{n-2}(\phi_1)d\phi_1\cdots\int_0^{2\pi}d\phi_{n-1} \end{aligned}$$

que es lo mismo que tener:

$$\begin{aligned} V_n(R) &= \int\cdots\int R^{n-1}\sin^{n-2}(\phi_1)\cdots\sin(\phi_{n-2})dRd\phi_1 d\phi_2\cdots d\phi_{n-1} \\ &= \frac{R^n}{n}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(\phi_1)d\phi_1\right)\cdots\left(4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi_{n-1}\right). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Ahora, usando las proposiciones 1.2.25 y 1.2.28 y reemplazando en la ecuación (1.33), nos da:

$$\begin{aligned} V_n(R) &= \frac{R^n}{n}\beta\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot\beta\left(\frac{n-2}{2},\frac{1}{2}\right)\cdots\beta\left(1,\frac{1}{2}\right)\cdot 2\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{R^n}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdots 2\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \\ &= 2\cdot\frac{R^n}{n}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{n-veces} \\ &= \frac{R^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n.$$

Ejemplo 1.3.5. Calculemos el volumen y el área de una esfera de dimensión $n = 3$.

$$V_3(R) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} R^3}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} R^3}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} R^3}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} R^3}{\frac{3}{4}\pi^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

y

$$A_2(R) = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} R^2}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} R^2}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{4\pi^{\frac{3}{2}} R^2}{\pi^{\frac{1}{2}}} = 4\pi R^2.$$

1.3.3 Distribuciones en Probabilidad y Estadística

En esta parte veremos como la función Gamma puede usarse para definir distintas funciones de distribución acumulada, en estadística y probabilidad. Para ello recordaremos algunas definiciones de teoría de la medida y de probabilidades.

Sea X un conjunto no vacío y $\Omega \subset P(X)$ una colección de subconjuntos de X.

Definición 1.3.1. Diremos que Ω es una álgebra en $P(X)$ si ocurren las siguientes propiedades

(i) Si $A \in \Omega$ entonces $(X \setminus A) \in \Omega$ y

(ii) (aditividad) Si $A_1, A_2 \in \Omega$ entonces $A_1 \cup A_2 \in \Omega$ y

(iii) $X \in \Omega$.

Cuando la colección Ω satisface solamente las condiciones (i) y (ii) se dice que es un anillo en $P(X)$.

Cuando la colección Ω cumple las condiciones $(i), (iii)$ y la siguiente condición de σ-aditividad: *Si* $A_i \in \Omega\ \forall i \in \mathbb{N}$ *entonces* $\cup_{i=0}^{\infty} A_i \in \Omega$; decimos que Ω es una *σ-álgebra en* $P(X)$.

Ejemplo 1.3.6. Si Ocurre que el par $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico entonces la menor σ-álgebra que contiene a los abiertos de la topología $\mathcal{T}$ se la llama la σ-álgebra de *Borel* de X. Para obtener esta σ-álgebra basta intersectar a todas las σ-álgebras que contienen a los abiertos de $\mathcal{T}$. Por ejemplo $P(X)$ es una de ellas.

Al par (X, Ω) se le llama *espacio medible* si X es un conjunto no vacío y Ω es una σ-álgebra en $P(X)$.

Vamos ahora a definir el concepto de medida sobre un espacio medible.

Definición 1.3.2. Sea Ω una σ-álgebra de subconjuntos de X. Una función $\mu : \Omega \to [0, \infty]$ se dice una *medida sobre* Ω si:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) Para toda familia enumerable de conjuntos dos a dos disjuntos $A_i; i \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mu(\cup_i A_i) = \Sigma_i \mu(A_i)$.

Un *espacio de medida* es una terna (X, Ω, μ) donde X es un conjunto no vacío; Ω es una σ-álgebra de subconjuntos de X y μ es una medida sobre Ω.

Ejemplo 1.3.7. En $\mathbb{R}^n$ consideramos la σ-álgebra de los bolerianos $\mathcal{B}$. En este caso existe una única medida $\lambda : \mathcal{B} \to [0, \infty[$ tal que para cada rectángulo $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ se cumple que $\lambda(A) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n)$. Esta medida se llama la *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}^n$.En lo que sigue consideraremos el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$.

El espacio de medida (X, Ω, μ) se dice un *espacio de probabilidad* si ocurre que $\mu(X) = 1$.

Definición 1.3.3. Consideremos dos espacios medibles (X, Ω) e $(Y, \mathcal{B})$. Una función $f : X \to Y$ se dice *medible* si ocurre que $\forall B \in \mathcal{B}$ se cumple que $f^{-1}(B) \in \Omega$.

Ejemplo 1.3.8. Una *variable aleatoria a valores reales* del espacio medible (X, Ω) es una función medible $\xi : X \to \mathbb{R}$, en donde hemos considerado la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$. Si ocurre que la imagen $\xi(X) \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto finito o infinito enumerable se dice que la variable aleatoria ξ es discreta. En el caso que existan $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ tales que $[a, b] \subset \xi(X)$ diremos que ξ es una variable aleatoria continua.

Consideremos el espacio medible (X, Ω) y $\xi : X \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria continua. Para valores $a \leqslant b$ en $\mathbb{R}$ o $a = -\infty$ o $b = \infty$ podemos formar los subconjuntos medibles de X:

$$[a < \xi < b] = \{x \in X / a < \xi(x) < b\},$$

o

$$[a \leqslant \xi < b] = \{x \in X / a \leqslant \xi(x) < b\},$$

o

$$[a < \xi \leqslant b] = \{x \in X / a < \xi(x) \leqslant b\},$$

o

$$[a \leqslant \xi \leqslant b] = \{x \in X / a \leqslant \xi(x) \leqslant b\}.$$

Consideremos ahora una medida de probabilidad $P : \Omega \to [0, 1]$. Tenemos los valores reales $P([a \leqslant \xi \leqslant b])$ definidos para cada variable aleatoria ξ y cada par de números reales $a \leqslant b$.

Definición 1.3.4. Una función integrable, no negativa $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, se dirá una *densidad* de la variable aleatoria ξ, asociada a la probabilidad P, si ocurre que:

$$P([a \leqslant \xi \leqslant b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

Esto es el valor $P(\{x \in X/a \leqslant \xi(x) \leqslant b\})$ coincide con la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

En particular, se cumple que: $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Observamos que el intervalo de definición de la función de densidad se puede extender a todo $\mathbb{R}$, considerando $f(x) = 0$ para $-\infty < x \leqslant 0$ o $1 \leqslant x < \infty$.

Ahora que hemos definido la función de densidad de una variable aleatoria podemos definir la media, la varianza y la función de distribución asociadas a dicha variable aleatoria. A saber:

Definición 1.3.5. (i) la *media* o *esperanza* de la variable aleatoria ξ es el valor μ definido por:

$$\mu = E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx;$$

(ii) La *varianza* de la variable aleatoria ξ es el valor:

$$var(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)dx;$$

(iii) La *función de distribución acumulada o simplemente función de distribución* de la variable aleatoria ξ es la función real $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = P([\xi \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds.$$

Ahora, en general, podemos suponer que cualquier función no negativa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, es una función de densidad de alguna variable aleatoria asociada a alguna medida de probabilidad en algún espacio de eventos X. En este caso la función $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$; es la función de distribución definida por la densidad $f(x)$. Observamos que si la función de densidad es continua, entonces la función de distribución es derivable y

$$F'(x) = f(x). \tag{1.34}$$

No es difícil verificar (ver Saavedra Gallardo (2012)), que una función $F(x)$ de distribución (asociada a una variable aleatoria ξ) satisface las propiedades:

a) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$;

b) $P(a < \xi \leqslant b)] = F(b) - F(a)$, para $a < b$;

c) Si $a \leqslant b$ entonces $F(a) \leqslant F(b)$ esto es, F es no decreciente;

d) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$;

e) $\lim_{x\to t^+} F(x) = F(t)$, es decir, F es continua por la derecha;

f) $P(\xi = t) = F(t) - F(t^-)$, donde $F(t^-) = \lim_{x\to t^-} F(x)$. Es decir, $P(\xi = t)$ es el tamaño del "salto" de F en t.

Ahora podemos, al revés, dada una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface las propiedades $[a)] - [f)]$ anteriores, definir una función de densidad $f(x)$ por la relación (1.34).

Así, dada una función de densidad tenemos una de distribución y dada una de distribución tenemos una de densidad.

A lo largo del tiempo se han generado diversas funciones de distribución más conocidas. Veremos algunas.

Distribución Gamma

Esta distribución de probabilidad continua se utiliza para modelar el comportamiento de variables aleatorias con asimetría y/o algúnos experimentos en que está involucrado el tiempo.

Definición 1.3.6. Sea X una variable aleatoria continua para la que suponemos que su función de densidad es:

$$f(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & \text{para } \; x > 0, \alpha, \beta > 0 \\ 0 & \text{para otro caso.} \end{cases}$$

De esta distribución, podemos mencionar tres casos particulares:

a) **Distribución de Poisson**: Distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia media, x, la probabilidad que ocurra un determinado número de eventos $\alpha \in X$, durante un intervalo de tiempo dado.

Definición 1.3.7. Sea X una variable aleatoria que representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurren a una rapidez constante sobre el tiempo o el espacio. Se dice, entonces que la variable aleatoria X tiene una distribución de Poisson con función densidad de probabilidad:

$$f(x,\alpha,1) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & \text{para } \; x > 0, \alpha \in \mathbb{Z}^{+} \\ 0 & \text{para otro caso.} \end{cases}$$

Si hacemos $\alpha - 1 = \lambda$ tenemos la función densidad de probabilidad que aparece generalmente en la literatura:

$$f(x, \lambda, 1) = \begin{cases} \dfrac{x^{\lambda} e^{-x}}{\lambda!} & \text{para } x > 0, \lambda \in \mathbb{Z}_0^+ \\ 0 & \text{para otro caso.} \end{cases}$$

b) **Distribución exponencial**: La distribución exponencial es utilizada para determinar la probabilidad de que en cierto tiempo suceda un determinado evento.

Definición 1.3.8. Una variable aleatoria X tiene una distribución exponencial si su función de densidad está dada por:

$$f(x, 1, \frac{1}{\lambda}) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{para otro caso.} \end{cases}$$

La distribuciones de Poisson y exponencial, aparte de ser casos especiales de la distribución Gamma, guardan otra relación relevante y simple.

Supongamos que X sea una variable aleatoria, con distribución de Poisson con parámetro λ, que describe el número de ocurrencias de un fenómeno por unidad de tiempo, entonces la variable aleatoria que describe el tiempo entre ocurrencias consecutivas tiene distribución exponencial con parámetro λ y en tal caso este parámetro λ es la tasa media por unidad de tiempo, y $\beta = \frac{1}{\lambda}$ es el tiempo entre estas ocurrencias. Es decir, haciendo uso de la distribución de Poisson, podemos asumir que la probabilidad de que no ocurra algún evento, en el periodo hasta el tiempo t, está dada por:

$$f(\lambda t, 0, 1) = P(X = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}.$$

Podemos utilizar lo anterior y hacer que X sea el tiempo para el primer evento Poisson. La probabilidad de que la duración del tiempo hasta el primer evento exceda x es la misma que la probabilidad de que no ocurra algún evento de Poisson en x. Esto último está dado por $e^{-\lambda x}$, es decir:

$$P(X \geqslant x) = e^{-\lambda x}.$$

Así la función de distribución acumulada para X está dada por:

$$P(0 \leqslant X \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Ahora para reconocer la presencia de la distribución exponencial, podemos derivar la función de distribución acumulada anterior para obtener la función densidad:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

que es la función de distribución exponencial con $\lambda = \dfrac{1}{\beta}$.

c) **Distribución ji cuadrada (o χ-cuadrada o de Pearson)**: Otro caso importante que se desprende de la distribución Gamma, se obtiene al hacer $\alpha = \frac{\nu}{2}$ y $\beta = 2$, con $\nu \in \mathbb{Z}^+$. Este resultado se llama distribución ji cuadrada. El parámetro ν, es llamado *grado de libertad*.

Esta distribución juega un papel importante en inferencia estadística y además tiene aplicaciones en meteorología.

Definición 1.3.9. Sea la variable aleatoria X continua. Diremos que X tiene una distribución ji cuadrada, con ν grados de libertad, si su función de densidad está dada por:

$$f(x, \frac{\nu}{2}, 2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{para } \ x > 0, \nu \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 & \text{para otro caso.} \end{cases}$$

Distribución Beta

Otra distribución continua de uso frecuente es la distribución beta, que suele utilizarse para modelar fracciones tales como la proporción de impurezas en un producto químico o para modelar eventos que se definen por valores mínimos y máximos. La escala de la distribución beta suele modificarse para modelar el tiempo hasta la culminación de una tarea. También se utiliza en la estadística bayesiana.

Definición 1.3.10. Sea X una variable aleatoria . Decimos que tiene una distribución beta si su función de densidad esta dada por:

$$f(x, p, q) = \begin{cases} \beta(p, q) x^{p-1}(1-x)^{q-1} & \text{para } \ 0 < x < 1, p, q \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{para otro caso} \end{cases}$$

con $\beta(p, q) = \dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$.

Distribución de Weibull

Como la distribución Gamma y la exponencial, la distribución Weibull también se aplica a problemas de confiabilidad y de prueba de vida como los *tiempos de falla* o *duración de vida* de un componente, medido en algún tiempo especifico hasta que falla.

Definición 1.3.11. Decimos que la variable aleatoria X tiene una distribución de Weibull, con parámetros α y β si su función densidad está dada por:

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}} & \text{para } \ x > 0 \\ 0 & \text{para otro caso.} \end{cases}$$

A simple vista esta distribución no tiene ninguna relación con nuestra función Gamma, pero esta aparece al obtener la esperanza y varianza de la distribución Weibull.

Teorema 1.3.1. *La esperanza y varianza de la distribución Weibull son:*

$$\begin{aligned} E\left[X\right] =& \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right) \ \ y \\ var\left[X\right] =& \alpha^{-\frac{2}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2\right]. \end{aligned}$$

Prueba. Recordemos que la esperanza de una distribución de probabilidad es:

$$E\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

siendo $f(x)$ la función densidad. Dado que en nuestro caso la función densidad es válida para $x > 0$, tendremos:

$$E\left[X\right] = \int_{0}^{\infty} x\alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}}dx$$

usando el cambio de variables $\alpha x^{\beta} = t$ y reemplazando, tenemos

$$\begin{aligned} E\left[X\right] =& \int_{0}^{\infty}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\alpha\beta\left(\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta-1}e^{-t}\frac{1}{\beta}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}-1}\frac{1}{\alpha}dt \\ =& \int_{0}^{\infty}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\frac{t}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}-1}e^{-t}dt \\ =& \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\int_{0}^{\infty}t^{\frac{1}{\beta}+1-1}e^{-t}dt = \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\int_{0}^{\infty}t^{\frac{1}{\beta}}e^{-t}dt \end{aligned}$$

y de la definición 1.2.1, tenemos que:

$$E\left[X\right] = \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right).$$

La varianza de una distribución de probabilidad es:

$$var\left[X\right] = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2$$

como ya tenemos $E\left[X\right]$, calculamos

$$E\left[X^2\right] = \int_{0}^{\infty} x^2\alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}}dx.$$

Usando el mismo cambio de variable $t = \alpha x^{\beta}$, tenemos

$$E\left[X^2\right] = \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{2}{\beta}} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{1-\frac{1}{\beta}} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-t} dt$$
$$= \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \int_0^{\infty} t^{\frac{2}{\beta}+1-1} e^{-t} dt$$

y usando el definición 1.2.1, nos da

$$E\left[X^2\right] = \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right),$$

entonces tenemos que:

$$var\,[X] = \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right]^2$$
$$= \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right]^2\right].$$

□

Distribución de Student

La distribución de Student surge del problema de estimar la media de una población normalmente distribuida cuando el tamaño de la muestra es pequeño.

Definición 1.3.12. Una variable aleatoria se distribuye según el modelo de probabilidad de Student con n grados de libertad si su función de densidad es:

$$f(t,n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)} \qquad -\infty < t < \infty.$$

Vamos ahora a probar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,n) = 1.$

Tenemos:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)} dt$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \cdot 2 \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)} dt.$$

Si hacemos $u = \frac{t^2}{n}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \cdot 2\int_0^{\infty} (1+u)^{-\frac{1}{2}(n+1)} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{(1+u)^{\frac{1}{2}(n+1)}} du \end{aligned}$$

y dado que $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}} du$, usamos $y = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{n}{2}$, por tanto:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi}} \cdot \beta\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

esto es: $I = 1$, como queríamos probar.

Distribución de Snedecor

Esta distribución es muy utilizada a la hora de detectar la existencia o inexistencia de diferencias significativas entre muestras diferentes. Especialmente, en aquellos casos en los que se quiere investigar la relevancia de un factor en el desarrollo y naturaleza de una característica.

Definición 1.3.13. Sean las variables aleatorias independientes X e Y con n_1 y n_2 grados de libertad respectivamente, tenemos la variable aleatoria

$$F = \frac{n_2 x}{n_1 y}$$

cuyo campo de variación es $F > 0$, tiene por función de densidad de probabilidad a:

$$f(F, n_1, n_2) = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \frac{F^{\frac{n_1-2}{2}}}{\left(1 + \frac{n_1 F}{n_2}\right)^{(\frac{n_1+n_2}{2})}}.$$

Vamos ahora a probar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(F, n_1, n_2) = 1$ y como el campo de variación es $F > 0$, hay que probar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(F, n_1, n_2) = 1$

Tenemos:

$$\begin{aligned} I =& \int_0^\infty \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \frac{F^{\frac{n_1-2}{2}}}{\left(1+\frac{n_1 F}{n_2}\right)^{(\frac{n_1+n_2}{2})}} dF \\ =& \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \int_0^\infty \frac{F^{\frac{n_1-2}{2}}}{\left(1+\frac{n_1 F}{n_2}\right)^{(\frac{n_1+n_2}{2})}} dF. \end{aligned}$$

Si hacemos $u = \dfrac{n_1 F}{n_2}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} I =& \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} \cdot \frac{n_2}{n_1} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{n_1}{2}-1}}{(1+u)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} du \\ =& \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{n_1}{2}-1}}{(1+u)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} du \end{aligned}$$

y dado que $\beta(x, y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}} du$, usamos $y = \frac{n_1}{2}$ y $x = \frac{n_2}{2}$, por tanto:

$$\begin{aligned} I =& \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \beta\left(\frac{n_2}{2}, \frac{n_1}{2}\right) \\ =& \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} \\ =& 1 \end{aligned}$$

esto es: $I = 1$, como queríamos probar.

1.3.4 La Función Gamma en Soluciones de Ecuaciones Diferenciales

La función Gamma también aparece en la búsqueda de soluciones de diferentes ecuaciones diferenciales.

Ecuación Diferencial de Bessel

La ecuación diferencial $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \alpha^2)y(x) = 0$, conocida como de Bessel, cuyas soluciones son de la forma:

$$y(x) = aJ_\alpha(x) + bJ_{-\alpha}(x) \text{ para } \alpha \notin \mathbb{Z}_0^+ \ \vee$$
$$y(x) = a_1J_\alpha(x) + b_1Y_\alpha(x) \text{ con } Y_n(x) = \lim_{\alpha \to n} Y_\alpha(x) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

con $J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}$ y $Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$.

Para mayores detalles sobre la ecuación de Bessel recomendamos el texto Gui nez, Labarca y Martínez (2004).

Ecuación Hipergeométrica de Gauss

Para a, b y c constantes reales, se llama ecuación hipergeométrica de Gauss a la ecuación $x(1-x)y''(x) + [c - (a+b+1)x]\,y'(x) - aby(x) = 0$, que tiene como solución a las funciones:

$$y(x) = \alpha F(a,b,c,x) + \beta|x|^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

con

$$F(a,b,c,x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+k)} x^k$$

con α, β constantes, $c \notin \mathbb{Z}$, $c \neq a+b+1$ y la cual está definida para $0 < |x| < 1$

Para mayores detalles sobre la ecuación de hipergeométrica de Gauss recomendamos el texto Gui nez, Labarca y Martínez (ibíd.).

1.3.5 Aplicaciones en el Campo de la Física

La función Gamma aparece ocasionalmente en problemas en física por ejemplo, en la racionalización de las funciones de onda de Coulomb y el cálculo de probabilidades en la mecánica estadística, entre otros casos. Sus aplicaciones, en la física, son menos cuando comparadas con otras funciones, pero su importancia está en el desarrollo de otras funciones que tienen una implicancia directa en la física y, por ello, su inclusión en este trabajo.

Estimación de Potencial Eólico usando la Distribución Weibull

Una de las formas más comunes de analizar los datos de velocidad del viento Oyrazo y Mancilla (2006), y de elaborar estudios sobre energías renovables basados en energía

eólica es hacerlo mediante una función densidad de probabilidad, en este caso la distribución de Weibull. Esta describe con bastante confiabilidad la distribución de la velocidad del viento para un intervalo de un mes o hasta para un año.

La función de densidad de probabilidad de Weibull para la velocidad del viento (v) está dada por la siguiente expresión:

$$f(v) = \begin{cases} \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} & \text{para } k, v > 0 \wedge c > 1 \\ 0 & \text{para otro caso.} \end{cases}$$

Esta densidad depende de dos parámetros: c que se denomina parámetro de escala y k que es el factor de la forma. Existen varios métodos para calcular estos parámetros, y estos claramente van a variar de mes a mes dada la estación del año en que estemos y la localidad geográfica. Uno de estos métodos es cuando conocemos la velocidad media ($\overline{v}$) y la desviación estándar (σ) de la velocidad, entonces una buena aproximación del valor k es:

$$k = \left(\frac{\sigma}{\overline{v}}\right)^{-1{,}086}.$$

El valor c, podemos calcularlo de la siguiente manera, recordemos que la velocidad media se puede obtener mediante la integral $\overline{v} = \int_0^\infty v f(v) dv$, si $f(v)$ es nuestra función de densidad de probabilidad Weibull, tenemos que:

$$\overline{v} = \int_0^\infty \frac{vk}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} dv$$

si hacemos el cambio de variable $x = \left(\frac{v}{c}\right)^k$, obtenemos que

$$\overline{v} = c\int_0^\infty x^{\frac{1}{k}} e^{-x} dx$$

y ahora haciendo $y = 1 + \frac{1}{k}$ tenemos que

$$\overline{v} = c\int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx$$

lo que es justamente nuestra función Gamma, por lo tanto:

$$c = \frac{\overline{v}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}.$$

También, dada esta función de densidad de probabilidad, podemos calcular la potencia

promedio del viento, es decir:

$$\overline{P_w} = \frac{1}{2}\rho A \int_0^{\infty} v^3 f(v) dv$$

siendo ρ la densidad del aire. Nuevamente reemplazando $f(v)$ por la función de densidad de probabilidad Weibull, y haciendo los mismos reemplazos obtenemos que:

$$\overline{P_w} = \rho A c \Gamma \left(1 + \frac{3}{k}\right)$$

y dado que $c = \dfrac{\overline{v}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}$, tenemos que:

$$\overline{P_w} = \frac{\rho A \overline{v}^3 \Gamma\left(1+\frac{3}{k}\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]^3}.$$

Función de Luminosidad de Galaxias

La función de luminosidad de galaxias es una aplicación de interés en astrofísica, ya que revela la distribución de los distintos tipos de galaxias según su luminosidad. Este parámetro depende de cómo se han formado y cómo han evolucionado durante su vida y, por ello, proporciona información sobre ambos procesos. La luz que recibimos desde las galaxias es el resultado también de sus interacciones con otras, por ello su importancia Coendra (2008), Carroll y Ostlie (2007). En la práctica la función de luminosidad (LF) nos da la densidad numérica de galaxias en función de la magnitud, la cual puede ser diferencial, número de galaxias por unidad de magnitud (o luminosidad) o en forma integrada, número de galaxias con magnitud superior a una magnitud dada. Sea $v(M, x, y, z)$ el número de galaxias que yacen en el volumen dV en (x, y, z) con magnitudes entre M y $M + dM$. Si suponemos que las magnitudes de las galaxias no se correlacionan con la posición, resulta:

$$v(M, x, y, z) dM dV = \phi(M) D(x, y, z) dM dV$$

donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(M) dM = 1$$

y donde $\phi(M)$ da la fracción de galaxias por unidad de magnitud con magnitudes absolutas comprendidas entre M y $M + dM$ y recibe el nombre de función de luminosidad. $D(x, y, z)$ da el número de galaxias (de todas las magnitudes) por unidad de volumen en (x, y, z) y se llama función densidad. A través de las observaciones se encuentra que la

LF puede ser ajustada por la función de Schechter (1976):

$$\phi(M)dM = 0,4\ln(10)\phi^* 10^{-0,4(M-M^*)(\alpha-1)} e^{-10^{-0,4(M-M^*)}}$$

o escrita en términos de la luminosidad

$$\phi(L)dL = \phi^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^{\alpha} e^{-\frac{L}{L^*}} \frac{dL}{L^*}.$$

Los parámetros en esta última ecuación son la normalización ϕ^*, la pendiente logarítmica α de la parte débil y la magnitud (o luminosidad L^*) característica M^*, la cual marca la transición entre el comportamiento exponencial de la parte brillante y la ley de potencias con exponente α de la parte débil de la LF. Cuando se determina la LF se debe especificar de qué tipo de objeto se trata y en qué ambiente se encuentra.

Ahora el número de galaxias total por volumen, es decir, la densidad de galaxias, usando la función de Schechter será:

$$\int_0^{\infty} \phi(L)dL = \int_0^{\infty} \phi^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^{\alpha} e^{-\frac{L}{L^*}} \frac{dL}{L^*}$$

si hacemos el cambio de variable $t = \frac{L}{L^*}$ tendremos

$$\int_0^{\infty} \phi(L)dL = \int_0^{\infty} \phi^* t^{\alpha} e^{-t} dt = \phi^* \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt,$$

y con $\int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha + 1)$, por lo tanto,

$$\int_0^{\infty} \phi(L)dL = \phi^* \Gamma(\alpha + 1).$$

También podemos obtener la densidad de luminosidad total, es decir:

$$\rho_L = \int_0^{\infty} \phi(L)LdL$$

y nuevamente usando la función de Schechter y el cambio de variable $t = \frac{L}{L^*}$ tendremos que

$$\rho_L = \phi^* L^* \Gamma(\alpha + 2).$$

Recordemos que la función Gamma se extiende para $x < 0$ (donde diverge o es negativa o es positiva). Contando con que α toma valores típicos entre $-0,5$ y -2.0, entonces la densidad de galaxias es finita (y positiva, como debe ser) solo si $\alpha > -1$ (ya que en este caso $0 < \alpha + 1 < 0,5$) y la densidad de luminosidad de todas las galaxias que entran en una LF tiene un valor válido si $\alpha > -2$ (ya que en este caso $0 < \alpha + 2 < 1,5$).

Ahora si queremos el número de galaxias en un intervalo de luminosidad determinado

se necesita la función Gamma incompleta para un $L > L_1$:

$$\int_{L_1}^{\infty} \phi(L)dL = \phi^* \Gamma \left(\alpha + 1, \frac{L_1}{L^*} \right).$$

2 Sistemas Dinámicos

2.1 Introducción

En este capítulo presentamos resultados originales, respecto de la dinámica de la función Gamma.

En la sección 2.2 enunciamos definiciones y diversos resultados necesarios para las secciones siguientes.

En la sección 2.3 probamos diversos resultados sobre la dinámica de la función Gamma. A saber, estimamos el punto de mínimo en $x > 0$; establecemos y estimamos puntos fijos en $x > 0$; estimamos soluciones de la ecuación $\Gamma(x) = -2$ en los intervalos $]-3, -2[$ y $]-5, -4[]$ y, además, probamos que la derivada de Γ en estos puntos es, en valor absoluto, mayor que 8. También, calculamos la extensión del conjunto estable del punto fijo atractor $x = 1$.

En la sección 2.4 damos la definición de la entropía topológica; algunas de sus propiedades, un algoritmo para calcularla; la extensión de la definición a nuestro contexto; calculamos las derivadas $\Gamma'(x_k)$, $\Gamma'(y_k)$ donde x_k e y_k son las soluciones de $\Gamma_k(x) = -2$ para $x \in]-2k-1, -2k[$ y $k \geqslant 3$; usamos este hecho para construir una conjugación topológica entre el shift de $2n$ símbolos y el conjunto maximal invariante de Γ en la unión de intervalos $\cup_{j=1}^{j=n}(]-2j-1, -2j[)$; finalmente usamos este resultado para probar que la entropía de Γ es infinitamente grande. Como consecuencias sobre las estimaciones de la derivada concluimos que el conjunto maximal invariante en $\cup_{j=1}^{j=n}(]-2j-1, -2j[)$ es hiperbólico $\forall n \geqslant 1$. Asimismo, dejamos planteada una pregunta para futuras investiga-

ciones en el tema.

2.2 Previos

Definición 2.2.1. Decimos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posee un máximo (respectivamente mínimo) local en el punto $p \in \mathbb{R}$ si existe $\delta > 0$ tal que $q \in \mathbb{R}$, con $|p - q| < \delta$, implica $f(q) \leqslant f(p)$ (respectivamente $f(q) \geqslant f(p)$).

Teorema 2.2.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $x_0 \in]a, b[$.*

a) Supongamos que $f'(x_0) > 0$. Entonces existe $h > 0$ tal que si $x_0 < y < x_0 + h$ se tiene que $f(x_0) \leqslant f(y)$.

b) Supongamos que $f'(x_0) < 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, con $x \leqslant y$, se tiene que $f(x) \geqslant f(y)$.

Prueba. Por definición de derivada, tenemos que $f'(x_0) = \lim_{y \to x_0} \dfrac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$

a) Dado que $f'(x_0) > 0$, tenemos que $f'(x_0) = \lim_{y \to x_0} \dfrac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} > 0$, luego existe un $h > 0$ tal que $x_0 < y < x_0 + h$ implica que $\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} > 0$ y dado el hecho de que $y - x_0 > 0$ se tiene que $f(y) > f(x_0)$.

   Análogamente, se prueba que si $f'(x_0) > 0$, entonces existe $h > 0$ tal que $x_0 - h < y < x_0$ implica que $y - x_0 < 0$, entonces $f(y) < f(x_0)$.

b) Dado que $f'(x_0) < 0$, tenemos que $f'(x_0) = \lim_{y \to x_0} \dfrac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} > 0$, luego existe un $\delta > 0$ tal que $x_0 < y < x_0 + \delta$ implica que $\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} < 0$ y dado el hecho de que $y - x_0 > 0$ se tiene que $f(y) < f(x_0)$.

   Análogamente, se prueba que si $f'(x_0) < 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $x_0 - \delta < y < x_0$ implica que $y - x_0 < 0$, entonces $f(y) > f(x_0)$.

□

Nota. En el primer caso decimos que la función es creciente y en el segundo decimos que la función es decreciente, en una vecindad de x_0.

Teorema 2.2.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $x_0 \in [a, b]$. Si f tiene un máximo (respectivamente un mínimo) local en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.*

Prueba. Del teorema anterior, tenemos que si $f'(x_0) \neq 0$, entonces $f'(x_0) > 0$ ó $f'(x_0) < 0$, es decir, la función es creciente ó decreciente, entonces f no puede tener un máximo ni un mínimo local en x_0. □

Teorema 2.2.3. *(Del valor intermedio) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Sean $c = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ y $d = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$. Entonces para cada $z \in [c,d]$ existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = z$.*

Prueba. Como f es una función continua sobre el conjunto compacto $[a,b]$ se tiene que f alcanza su máximo y su mínimo sobre el intervalo $[a,b]$, llamamos a estos d y c respectivamente. Dado $z \in [c,d]$ sean $A_z = \{x \in [a,b] : f(x) < z\}$ y $B_z = \{x \in [a,b] : f(x) > z\}$. Es claro que A_z y B_z son subconjuntos abiertos y disjuntos de $[a,b]$. Si $f(x) \neq z$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $[a,b] = A_z \cup B_z$, esta es una unión de conjuntos abiertos y disjuntos, y esto no es posible dado que $[a,b]$ es conexo. Por lo tanto, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = z$. □

Teorema 2.2.4. *(Del valor intermedio para la derivada) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable. Si $f'(a) < d < f'(b)$, entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = d$.*

Prueba. Supongamos inicialmente que $d = 0$. Como $f'(a) < 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $a < x < a + \delta$, entonces $f(x) < f(a)$. Análogamente, como $f'(b) > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $b - \epsilon < x < b$, entonces $f(x) < f(b)$. Ahora, como f posee un mínimo en $[a,b]$ existe $c \in]a,b]$ tal que $f(c) \leqslant f(x)$ para cada $x \in [a,b]$, por lo tanto, $f'(c) = 0$. Si $d \neq 0$ consideramos la función $g(x) = f(x) - dx$ y se tiene que $g'(a) = f'(a) - d < 0$ y $g'(b) = f'(b) - d > 0$, luego existe $c \in]a,b[$ que satisface $g'(c) = 0$, esto es, $f'(c) = d$. □

Nota. Aún cuando no los hemos indicado, hemos usado el siguiente resultado.*Si f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0*. En particular, como hemos supuesto que f es derivable en $[a,b]$ se tiene que f es continua en $[a,b]$.

Teorema 2.2.5. *(de Rolle) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$, la cual satisface $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Prueba. Si f es constante sobre $[a,b]$ no hay nada que probar. Por otra parte, si f no es constante sobre $[a,b]$, entonces ella asume su máximo y su mínimo en $[a,b]$, uno de ellos debe ser alcanzado en el intervalo abierto $]a,b[$, pues $f(a) = f(b)$. Es claro que para cada uno de esos puntos la derivada f se anula.

□

Teorema 2.2.6. *(del Valor Medio) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable en $]a,b[$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$.*

Prueba. Definamos la función h por $h(x) = (f(b) - f(a))x - f(x)(b-a)$. Se tiene que $h(a) = h(b) = f(b)a - bf(a)$, y dado el Teorema de Rolle existe un $c \in]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$. Por lo tanto, $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$, lo que completa la prueba. □

Teorema 2.2.7. *(Taylor) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{n-1} y n-veces derivable en el intervalo $]a,b[$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que:*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a)\ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Prueba. Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$h(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{K}{n!}(b-x)^n; |1$$

elegimos la constante K de modo que $h(a) = 0$. Claro que h es continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$, y $h(a) = h(b) = 0$.

Notamos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -f'(x) - f''(x)(b-x) + f'(x) - f'''(x)(b-x)^2 - \ldots \\ &- \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(b-x)^{n-2} \to \\ &\to + \frac{K}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} \end{aligned}$$

esto es,

$$h'(x) = \frac{K - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}.$$

Por el teorema de Rolle tenemos que existe $c \in]a,b[$ para el cual $h'(c) = 0$ esto implica que $f^{(n)}(c) = K$. Como $h(b) = 0$ tenemos que:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a)` \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{K}{n!}(b-a)^n,$$

que es lo que queríamos probar. □

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Definimos f^n (la composición de f consigo misma n-veces) como $f^0 = Id$ (función identidad), $f^1 = f, f^2 = f \circ f; f^3 = f \circ f^2$ y $f^n = f \circ f^{n-1}$ para $n \geqslant 4$.

Definición 2.2.2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

a) Decimos que $x_0 \in [a,b]$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.

b) Decimos que $x_0 \in [a,b]$ es un punto periódico de período n de f si los valores $f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^n(x_0)$ están definidos, $f^i(x_0) \neq x_0$, para $1 \leqslant i \leqslant n-1$ y $f^n(x_0) = x_0$.

c) La órbita de $x \in [a,b]$ por f (o la órbita de x bajo f) es el conjunto $orb_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, cuando tiene sentido la composición de funciones.

Definición 2.2.3. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una aplicación continua y sea x_0 un punto fijo de f.

a) Decimos que x_0 es un punto fijo *atractor* si: $\exists\,\delta > 0$ tal que $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[-\{x_0\}$, entonces $|f(x)-x_0| < |x-x_0|$;

b) Decimos que x_0 es un punto fijo *repulsor* si: $\exists\,\delta > 0$ tal que $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[-\{x_0\}$, entonces $|f(x)-x_0| > |x-x_0|$.

c) Decimos que x_0 es un punto fijo *neutro* si no es atractor ni repulsor.

Lema 2.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 y dos veces derivable. Sea $x_0 \in]a,b[$ un punto fijo de f con $|f'(x_0)| < 1$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ implica $|f(x)-x_0| < \rho|x-x_0|$, para algún $\rho < 1$.*

De este lema notamos que se cumple que $|f^n(x)-x_0| < \rho^n|x-x_0|$, de donde deducimos que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$ para todo $|x-x_0| < \delta$.

Prueba. Sea $\lambda = f'(x_0)$. Sabemos que para cada $x \in]a,b[$ existe $t(x) \in]a,b[$ tal que:

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x-x_0) + \frac{f''(t(x))}{2!}(x-x_0)^2.$$

Sea $h(x) = \dfrac{f''(t(x))(x-x_0)}{2}$. Por la definición de la función h vemos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $|x-x_0| < \delta$ implica $|h(x)-h(x_0)| < \epsilon$, esto es,

$$\left|\frac{f''(t(x))}{2!}(x-x_0)^2\right| < \epsilon|x-x_0|.$$

Eligiendo $\epsilon > 0$ de modo que $\rho = \lambda + \epsilon < 1$, obtenemos

$$|f(x)-x_0| < \rho|x-x_0| \;\text{ y }\; |x-x_0| < \delta.$$

□

Proposición 2.2.8. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y x_0 un punto fijo que satisface $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un punto fijo atractor.*

Prueba. De la expresión

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(t(x))}{2!}(x-x_0)^2,$$

obtenemos

$$f(x) - x_0 = f'(x_0)(x-x_0)\left[1 + \frac{f''(t(x))}{2!\,f'(x_0)}(x-x_0)\right],$$

y luego

$$|f(x)-x_0| \leqslant |f'(x_0)[1+\delta](x-x_0)|,$$

como podemos suponer $|f'(x_0)[1+\delta]| < \rho < 1$; tenemos el resultado. □

Lema 2.2. *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *una aplicación de clase* C^1 *y dos veces derivable. Sea* $x_0 \in]a,b[$ *un punto fijo repulsor de* f *con* $|f'(x_0)|>1$. *Entonces existe* $\delta>0$ *tal que* $x\in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ *implica* $|f(x)-x_0|>\rho|x-x_0|$, *para algún* $\rho>1$.

Prueba. Similar a la demostración del lema 2.1 □

Proposición 2.2.9. *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *una función diferenciable y* x_0 *un punto fijo que satisface* $|f'(x_0)|>1$, *entonces* x_0 *es un punto fijo repulsor.*

Prueba. Similar a la demostración de la proposición 2.2.8. □

Uno de los conceptos clásicos en dinámica es el de topológicamente conjugados. A saber:

Definición 2.2.4. Sean X e Y espacios métricos, $f:X\to X$ y $g:Y\to Y$ aplicaciones continuas. Diremos que f es *topológicamente conjugado* a g si existe un homeomorfismo $h:X\to Y$ tal que $g\circ h(x)=h\circ f(x), \forall x\in X$.

Esto quiere decir, en particular, que hay un homeomorfismo que lleva la trayectoria de x bajo f en la trayectoria de $h(x)$ bajo g.

Otro concepto interesante en dinámica es el concepto de ω-Límite:

Definición 2.2.5. Sea $f:I\to I$, $I=[a,b]$ intervalo real. Para $x\in I$ *el conjunto* ω*-límite de* x*, bajo* f, es:

$$\omega(x)=\{y\in I/\exists n_i\to\infty \ \text{ con } \ f^{n_i}(x)\to y \ \text{ para } \ i\to\infty\},$$

es decir, es el conjunto de puntos donde la órbita positiva de x se acumula.

Proposición 2.2.10. *Si* $f:I\to I$ *y* $g:I'\to I'$, *son topológicamente conjugados, entonces:*

$$h(\omega_f(x_0))=\omega_g(h(x_0)).$$

Prueba. a)]Sea $y\in h(\omega_f(x_0))$, entonces $\exists\, x\in\omega_f(x_0)$ tal que $h(x)=y$. Ahora, como existe existe sucesión $n_i\to\infty$ tal que $f^{n_i}(x_0)\to x$; ya que $h(f^{n_i}(x_0))=g^{n_i}(h(x_0))$ y h es continua entonces $h(f^{n_i}(x_0))\to h(x)=y$. Esto es $g^{n_i}(h(x_0))\to y$, por tanto $y\in\omega_g(h(x_0)$. Concluimos que $h(\omega_f(x_0))\subset\omega_g(h(x_0)$.
b)Sea ahora $y\in\omega_g(h(x_0))$; entonces existe sucesión $n_i\to\infty$ tal que $g^{n_i}(h(x_0))\to y$.Como h^{-1} es continua, tenemos que $h^{-1}(g^{n_i}(h(x_0)))=f^{n_i}(x_0)\to h^{-1}(x)$, por lo tanto, $y=h^{-1}(x)\in\omega_f(x_0)$y, luego, $x\in h(\omega_f(x_0))$. En conclusión: $\omega_g(h(x_0))\subset h(\omega_f(x_0))$. De $a)$ y $b)$ concluimos que $h(\omega_f(x_0))=\omega_g(h(x_0))$. □

Corolario 2.2.11. *Sean $f : I \to I$ y $g : I' \to I'$, topológicamente conjugadas por medio de $h : I \to I'$. Si x es punto periódico de f, entonces $h(x)$ es punto periódico de g.*

Prueba. De la proposición anterior tenemos que si $f : I \to I$ y $g : I' \to I'$ son topológicamente conjugadas entonces $h(\omega_f(x_0)) = \omega_g(h(x_0))$, entonces dado que x_0 es punto periódico de f tenemos que

$$\omega_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)\},$$

y $h(\omega_f(x)) = \{h(x_0), h(f(x_0)), \cdots, h(f^{n-1}(x_0))\} = \omega_g(h(x_0)$ luego, $h(x_0)$ es punto periódico de g. □

Observamos, entonces, que la dinámica topológica de dos funciones $f : I \to I$ y $g : J \to J$, que son topológicamente conjugadas es, salvo un cambio de variables topológico $h : I \to J$ que satisface $h \circ f(x) = g \circ h(x), \forall x \in I$; la misma.

Para efectos de una conjugación topológica se debe exhibir una aplicación continua, con inversa continua que haga la ecuación de conjugación. Esto se puede debilitar solicitando que la aplicación h sea sólo sobreyectiva (y no necesariamente inyectiva) y en este caso se llama una *semi conjugación.*

2.3 Resultados importantes de la Función Gamma

En esta sección señalaremos algúnos resultados que nos permitirán hacer un estudio de la dinámica de la función Gamma. Entre los resultados que nos interesan están: encontrar y calcular los puntos fijos, determinar el carácter de ellos (atractor, repulsor o neutro) y/o los puntos mínimos o máximos de la función Gamma para $x > 0$ y $x < 0$. Dado que la función Gamma está definida como una integral impropia, no resulta simple encontrar, de manera explícita, estos puntos. Para ello, usaremos la aproximación de Stirling–De Moivre, proposición 1.2.32. Antes de encontrar estos puntos, veamos que ésta aproximación produce valores cercanos a los que se obtienen con la función Gamma: $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

Valor	$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$	Aproximación Stirling–De Moivre
1	1	0,9994994685336
$\frac{3}{2}$	$\approx 0,8862269254528$	0,8661553843017
2	1	0,99997898067
$\frac{5}{2}$	$\approx 1,3293403881791$	1,3293307671298
3	2	1,9999940099595
$\frac{7}{2}$	$\approx 3,3233509704478$	3,3233462787043
4	6	5,9999956006056
5	24	23,9999941451898
6	120	119,9999881350628
10	362880	362879,9971745871

Cuadro 2.1: Tabla comparativa de valores de la función Gamma con la aproximación de Stirling- De Moivre de orden 5 usando Microsoft Mathematics.

Gráficamente también podemos observar lo mismo:

2.3.1 Punto de Mínimo de la función Gamma para $x > 0$

Para calcular el punto mínimo de la función Gamma para $x > 0$ ocuparemos la aproximación de Stirling - De Moivre, es decir:

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4}\right)$$

y también usaremos el método de Newton-Raphson, el cuál es un algoritmo para encontrar aproximaciones de las raíces de una función.

Sabemos que $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, por tanto, del teorema 2.2.5 y usando el hecho de que $\Gamma''(x) > 0$ para $x > 0$, tenemos que el punto mínimo de la función Gamma está en

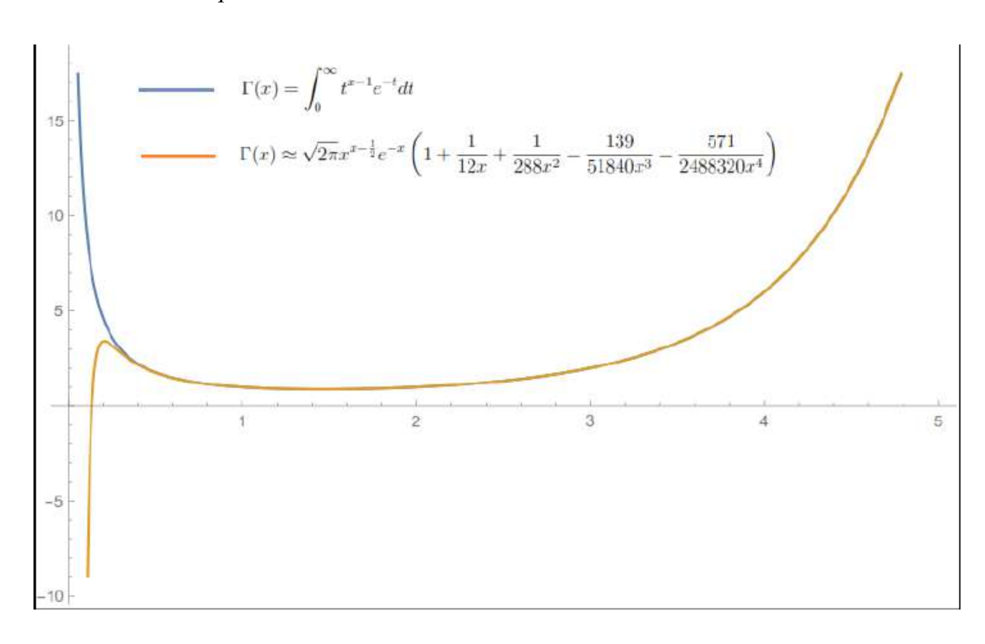


Figura 2.1: Función Gamma y aproximación de Stirling de orden 5 generada por Microsoft Mathematics.

el intervalo $[1, 2]$ y es el único mínimo para $x > 0$.

Usamos la aproximación de Stirling–De Moivre y calculamos la primera derivada de ella. A saber:

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\frac{571}{2488320x^4}\right);$$

$$\begin{aligned}\Gamma'(x) \approx & \sqrt{2\pi}e^{-x}\left(x^{x-\frac{1}{2}}\ln(x)-\frac{x^{x-\frac{3}{2}}}{2}\right)\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\right.\\ & \left.-\frac{571}{2488320x^4}\right)+\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(-\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{144x^3}+\frac{139}{17280x^4}+\right.\\ & \left.+\frac{571}{622080x^5}\right),\end{aligned}$$

entonces multiplicando y factorizando, obtenemos:

$$\Gamma'(x) \approx \sqrt{2\pi}e^{-x}\left(x^{x-\frac{1}{2}}\ln(x) + \frac{x^{x-\frac{3}{2}}\ln(x)}{12} + \frac{x^{x-\frac{5}{2}}\ln(x)}{288} - \right.$$
$$- \frac{139x^{x-\frac{7}{2}}\ln(x)}{51840} - \frac{571x^{x-\frac{9}{2}}\ln(x)}{2488320} - \frac{x^{x-\frac{3}{2}}}{2} - \frac{x^{x-\frac{5}{2}}}{8} - \frac{5x^{x-\frac{7}{2}}}{576} +$$
$$\left. + \frac{973x^{x-\frac{9}{2}}}{103680} + \frac{571x^{x-\frac{11}{2}}}{552960}\right).$$

Para encontrar el mínimo en el semieje positivo, $x > 0$, hacemos $\Gamma'(x) = 0$ y como $\sqrt{2\pi}e^{-x} \neq 0$ para cualquier valor de x, tenemos:

$$x^{x-\frac{1}{2}}\ln(x) + \frac{x^{x-\frac{3}{2}}\ln(x)}{12} + \frac{x^{x-\frac{5}{2}}\ln(x)}{288} - \frac{139x^{x-\frac{7}{2}}\ln(x)}{51840} -$$
$$- \frac{571x^{x-\frac{9}{2}}\ln(x)}{2488320} - \frac{x^{x-\frac{3}{2}}}{2} - \frac{x^{x-\frac{5}{2}}}{8} - \frac{5x^{x-\frac{7}{2}}}{576} + \frac{973x^{x-\frac{9}{2}}}{103680} +$$
$$+ \frac{571x^{x-\frac{11}{2}}}{552960} = 0$$

multiplicando por $4976640x^{-x+\frac{11}{2}}$, nos da:

$$4976640x^5\ln(x) + 414720x^4\ln(x) + 17280x^3\ln(x) -$$
$$- 13344x^2\ln(x) - 1142x\ln(x) - 2488320x^4 - 1658880x^3$$
$$- 43200x^2 + 46704x + 5139 = 0.$$

Para encontrar las soluciones de esta última ecuación, utilizaremos el método de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

donde la función, $f(x)$, será:

$$f(x) = 4976640x^5\ln(x) + 414720x^4\ln(x) + 17280x^3\ln(x)$$
$$- 13344x^2\ln(x) - 1142x\ln(x) - 2488320x^4 - 1658880x^3$$
$$- 43200x^2 + 46704x + 5139,$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) =& 24883200x^4 \ln(x) + 1658880x^3 \ln(x) + 51840x^2 \ln(x) - \\ &- 26688x \ln(x) - 1142 \ln(x) + 4976640x^4 - 9538560x^3 - \\ &- 4959360x^2 - 99744x + 45562 \end{aligned}$$

y dado que el mínimo de la función Gamma se encuentra entre 1 y 2 elegiremos $x_0 = 1,5$, y obtenemos:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1,4651788301846$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,4613788053233$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,4613361572095$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1,4613361518823.$$

Dado el grado de aproximación obtenido tenemos que el mínimo de la función Gamma es $x_{min} \approx 1,4613361518823$. Evaluemos este punto en la aproximación de Stirling- De Moivre,

$$\Gamma(x_{min}) \approx 0.8855226070359;$$

por tanto, el punto de mínimo del gráfico de la función Gamma para $x > 0$, es:

$$(1,4613361518823; 0.8855226070359).$$

2.3.2 Puntos Fijos de la Función Gamma en el semi eje positivo

De la misma forma que calculamos el punto de mínimo de la función Gamma, calcularemos el(los) punto(s) fijo(s) de ésta para $x > 0$. Es decir, usaremos la aproximación de Stirling - De Moivre y luego el método de Newton-Raphson para calcular los puntos fijos de la función Gamma, en el semi eje positivo.

Es claro que un punto fijo de la función Gamma es cuando $x = 1$, ya que $\Gamma(1) = 1$. Lo complejo es calcular el otro punto fijo de ésta función.

Primero, veamos en qué intervalo se encuentra éste punto fijo. Del cuadro 2.1 observamos que $\Gamma(3) = 2$ y que $\Gamma(4) = 6$. Esto es $[3,4] \subset \Gamma([3,4])$ lo que nos indica que el segundo punto fijo se encuentra en el intervalo $]3,4[$.

Ahora, usaremos la aproximación de la función Gamma para encontrar este punto fijo, es decir, resolveremos la ecuación:

$$\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4}\right) = x,$$

que es lo mismo que:

$$\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\frac{571}{2488320x^4}\right)-x=0$$

y, dado que es complicado encontrar soluciones de esta forma, usamos nuevamente el método de Newton-Raphson,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{g(x_n)}{g'x_n}$$

donde la función, $g(x)$ es:

$$g(x)=\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\frac{571}{2488320x^4}\right)-x.$$

Derivando tenemos:

$$\begin{aligned}g'(x)=&\sqrt{2\pi}e^{-x}\left(x^{x-\frac{1}{2}}\ln(x)+\frac{x^{x-\frac{3}{2}}\ln(x)}{12}+\frac{x^{x-\frac{5}{2}}\ln(x)}{288}-\right.\\&-\frac{139x^{x-\frac{7}{2}}\ln(x)}{51840}-\frac{571x^{x-\frac{9}{2}}\ln(x)}{2488320}-\frac{x^{x-\frac{3}{2}}}{2}-\frac{x^{x-\frac{5}{2}}}{8}-\\&\left.-\frac{5x^{x-\frac{7}{2}}}{576}+\frac{973x^{x-\frac{9}{2}}}{103680}+\frac{571x^{x-\frac{11}{2}}}{552960}\right)-1\end{aligned}$$

y dado que este punto fijo se encuentra en el intervalo $]3,4[$ elegiremos $x_0=3,5$:

$$x_1=x_0-\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}=3,5662572852031$$

$$x_2=x_1-\frac{g(x_1)}{g'(x_1)}=3,5623978916007$$

$$x_3=x_2-\frac{g(x_2)}{g'(x_2)}=3,5623838217599$$

$$x_4=x_3-\frac{g(x_3)}{g'(x_3)}=3,5623828215736,$$

por lo tanto, tenemos que el otro punto fijo de la función Gamma es:

$$x\approx 3,5623828215736,\ \text{en efecto}\ g(x)=3,5623828215736.$$

A continuación, veremos el carácter repulsor o atractor de los puntos fijos de la función Gamma.

Proposición 2.3.1. *El punto $x = 1$ es un punto fijo atractor de la función Gamma.*

Prueba. Sea $x = 1$ y usando la función digamma, es decir,

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right), x \neq 0, -1, \ldots$$

tenemos que: $\Psi(1) = \dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}\right) = -\gamma$, entonces tenemos que $\Psi(1) = \dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$, luego $\Gamma'(1) = \gamma \cdot \Gamma(1)$ y como $\Gamma(1) = 1$, tenemos $\Gamma'(1) = -\gamma$, esto es:$|\Gamma'(1)| = \gamma < 1$. Concluimos que $x = 1$ es atractor. □

Definición 2.3.1. Sea $x_0 \in]a, b[$ un punto fijo atractor de $f\ :]a, b[\to \mathbb{R}$. El conjunto estable de x_0, bajo f, es el conjunto: $W_f^s(x_0) = \{y \in]a, b[; f^n(y) \xrightarrow{n\to\infty} x_0\}$.

Proposición 2.3.2. *El conjunto estable del punto fijo atractor $x_0 = 1$, bajo la función Gamma, contiene al intervalo abierto $]x_2, x_1[$ donde $0 < x_2 < 1 < x_1$; x_1 es el punto fijo repulsor de Γ situado en $]3, 4[$ y $\Gamma(x_2) = x_1$.*

Prueba. Primero probemos que $|\Gamma'(x_1)| > 1$. Sabemos que $x_1 \approx 3,5623828215736$ es punto fijo de la función Gamma. Usaremos directamente la aproximación de Stirling–De Moivre, es decir,

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4}\right).$$

Derivando

$$\begin{aligned}\Gamma'(x) \approx \sqrt{2\pi}e^{-x}\Bigg(&x^{x-\frac{1}{2}}\ln(x) + \frac{x^{x-\frac{3}{2}}\ln(x)}{12} + \frac{x^{x-\frac{5}{2}}\ln(x)}{288} - \\ &- \frac{139x^{x-\frac{7}{2}}\ln(x)}{51840} - \frac{571x^{x-\frac{9}{2}}\ln(x)}{2488320} - \frac{x^{x-\frac{3}{2}}}{2} - \frac{x^{x-\frac{5}{2}}}{24} - \\ &- \frac{x^{x-\frac{7}{2}}}{576} + \frac{139x^{x-\frac{9}{2}}}{103680} + \frac{571x^{x-\frac{11}{2}}}{4976640} - \frac{x^{x-\frac{5}{2}}}{12} - \frac{x^{x-\frac{7}{2}}}{144} + \\ &+ \frac{139x^{x-\frac{9}{2}}}{17280} + \frac{571x^{x-\frac{11}{2}}}{622080}\Bigg),\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\Gamma'(x_1) \approx 4,0025450750553,$$

entonces tenemos que $|\Gamma'(x_1)| \approx 4,0025450750553 > 1$. Concluimos que x_1 es un punto fijo repulsor de Γ.

Sea ahora $x \in]x_2, 1[\cup]1, x_1[$. Primero suponemos que $x_2 < x < 1$. En este caso tenemos $1 < \Gamma(x) < x_1 = \Gamma(x_2)$.
Consideramos ahora x tal que $1 < x < x_1$; en este caso sea $\overline{x} \in]1, x_1[$ el punto tal que $\Gamma'(\overline{x}) = 0$. Si $y \in [1, \overline{x}]$, entonces $\Gamma(y) \in [\Gamma(\overline{x}), 1]$ y $\Gamma^2(y) \in [1, \overline{x}]$.
En esta situación, para la diferencia: $\left|\Gamma^2(\overline{x}) - \Gamma^2(1)\right|$, tenemos:

$$\left|\Gamma^2(\overline{x}) - \Gamma^2(1)\right| = \left|\left(\Gamma^2\right)'(w)(\overline{x} - 1)\right| = \left|\Gamma'(\Gamma(w)) \cdot \Gamma'(w)\right| |\overline{x} - 1|,$$

y como $\sup\{|\Gamma'(\overline{x})|, |\Gamma'(\Gamma(\overline{x}))|, |\Gamma'(1)|\} < 1$, entonces tenemos que $|\Gamma'(\Gamma(w))\,\Gamma'(w)| < \rho < 1$ y se cumple que $\left|\Gamma^2(\overline{x}) - \Gamma^2(1)\right| < \rho|\overline{x} - 1|$ o sea $\left|\Gamma^2(\overline{x}) - 1\right| < \rho|\overline{x} - 1|$, por lo tanto, $1 < \Gamma^2(\overline{x}) < \overline{x}$. De esta forma obtenemos que $1 < \ldots < \Gamma^{2k}(\overline{x}) < \Gamma^{2k-1}(\overline{x}) < \ldots < \overline{x}$ y $\lim_{k\to\infty} \Gamma^{2k}(\overline{x}) = 1$. En efecto, supongamos por absurdo que $1 < b = \lim_{k\to\infty} \Gamma^{2k}(\overline{x})$, entonces debe ser $\Gamma^2(b) = b$ y tenemos $|b-1| = \left|\Gamma^2(b) - \Gamma^2(1)\right| < \rho|b-1|$ para $\rho = \max\{|\Gamma'(b)|, |\Gamma'(\Gamma(b))|, |\Gamma'(1)|\} < 1$, lo que no puede ser. Por tanto cada $y \in [\Gamma^2(\overline{x}), \overline{x}]$ satisface
$\lim_{n\to\infty} \Gamma^n(y) = 1$ y $[\Gamma^2(\overline{x}), \overline{x}] \subset W^s_f(1)$.

Observamos, ahora, que el resultado, enunciado en la proposición, sigue de observar que para cualquier $w \in [\overline{x}, x_1]$ $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma^2(\overline{x}) \leqslant \Gamma^{2k}(w) \leqslant \overline{x}$.

En efecto, aplicando lo anterior, tenemos:

a) que si $x_2 < x < x_1$ entonces $\lim_{n\to\infty} \Gamma^n(x) = 1$.

b) Si $x \in]x_1, \infty[$, entonces $\lim_{n\to\infty} \Gamma^n(x) = \infty$. En particular $x \notin W^s_\Gamma(1)$.
En efecto, se deduce de que $|\Gamma'(x)| \geqslant |\Gamma'(x_1)|$ para cada $x > x_1$ y de que $x < \Gamma(x) < \Gamma^2(x) < \ldots$. Si $b = \lim_{n\to\infty} \Gamma^n(x)$, entonces $\lim_{n\to\infty} |\Gamma^{n+1}(x) - \Gamma^n(x)| = 0$ y no puede ser ya que $|\Gamma^n(\Gamma(x)) - \Gamma^n(x)| = |(\Gamma^n)'(z)||\Gamma(x) - x|$ para $z \in [x, \Gamma(x)]$. Si escribimos $\rho = \min\{|\Gamma'(w)|\}; w \in [x, \Gamma(x)] \geqslant 4$, entonces $|\Gamma^n(\Gamma(x)) - \Gamma^n(x)| = |(\Gamma^n)'(z)(\Gamma(x) - x)| \geqslant \rho^n|\Gamma(x) - x|$, por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} |\Gamma^{n+1}(x) - \Gamma^n(x)| = \infty$.
Así, $\forall x > x_1$ vale $x < \Gamma(x) < \Gamma^2(x) < \ldots$ y $\lim_{n\to\infty} \Gamma^n(x) = \infty$.

□

2.3.3 Soluciones de la Ecuación $\Gamma(x) = -2$

Para encontrar las soluciones de la ecuación $\Gamma(x) = -2$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \ldots\}$, lo primero que haremos será observar el gráfico de la función Gamma y la recta $y = -2$.
Vemos que la recta $y = -2$ corta el gráfico de la función Gamma en los intervalos $]-2n-1, -2n[$ para $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$. Primero nos concentraremos en el intervalo $]-3, -2[$.

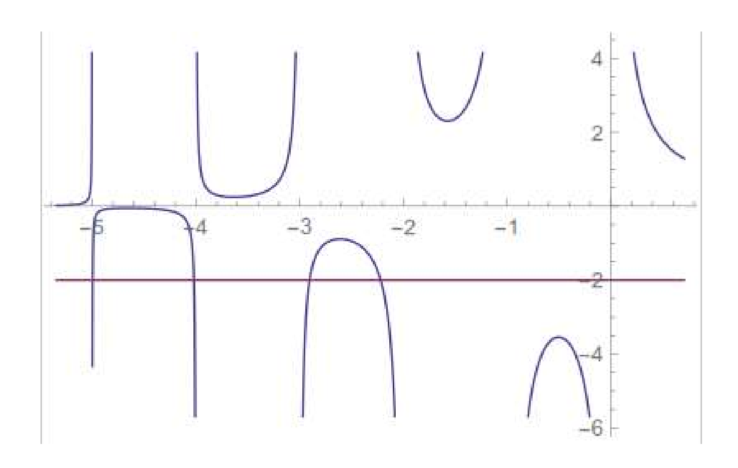


Figura 2.2: $\Gamma(x) = -2$.

Para encontrar estos valores usaremos la fórmula de reflexión de la función Gamma:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}; \quad \forall x \notin \mathbb{Z}.$$

Sea $x < 0$ con $\Gamma(x) = -2$, tenemos que:

$$-2 \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)};$$

haciendo el cambio de variable $y = -x$, tenemos:

$$-2\Gamma(y+1) = \frac{\pi}{\sin(-\pi y)}$$

obtenemos entonces la ecuación:

$$2\Gamma(y+1)\sin((\pi y)) - \pi = 0. \tag{2.1}$$

Ahora, como $y > 0$,podemos usar la aproximación de Stirling–De Moivre para y. A saber:

$$\Gamma(y) \approx \sqrt{2\pi}\, y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y} \left(1 + \frac{1}{12y} + \frac{1}{288y^2} - \frac{139}{51840y^3} - \frac{571}{2488320y^4}\right).$$

Sustituyendo $y+1$ por y en esta expresión, tenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma(y+1) =& y\Gamma(y)\\ \approx& \sqrt{2\pi}\, y^{y+\frac{1}{2}} e^{-y}\left(1+\frac{1}{12y}+\frac{1}{288y^2}-\frac{139}{51840y^3}-\frac{571}{2488320y^4}\right)\end{aligned}$$

reemplazando estos valores en la ecuación 2.1, tenemos que resolver la ecuación:

$$\begin{aligned}2\sqrt{2\pi}\, y^{y+\frac{1}{2}} e^{-y} \sin(\pi y)\left(1+\frac{1}{12y}+\frac{1}{288y^2}-\frac{139}{51840y^3}-\right.\\ \left.-\frac{571}{2488320y^4}\right)-\pi = 0.\end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación, usamos el método de Newton-Raphson con $g(y)$, dada por :

$$\begin{aligned}g(y) = 2\sqrt{2\pi}\, y^{y+\frac{1}{2}} e^{-y} \sin(\pi y)\left(1+\frac{1}{12y}+\frac{1}{288y^2}-\frac{139}{51840y^3}-\right.\\ \left.-\frac{571}{2488320y^4}\right)-\pi;\end{aligned} \tag{2.2}$$

para su derivada tenemos:

$$\begin{aligned}g'(y) =& 2\sqrt{2\pi}\, y^{y+\frac{1}{2}} e^{-y}\left[\left(\ln(y)+1+\frac{1}{2y}\right)\sin(\pi y)\left(1+\frac{1}{12y}+\right.\right.\\ &\left.+\frac{1}{288y^2}-\frac{139}{51840y^3}-\frac{571}{2488320y^4}\right)-\sin(\pi y)\Big(1+\\ &\left.+\frac{1}{12y}+\frac{1}{288y^2}-\frac{139}{51840y^3}-\frac{571}{2488320y^4}\right)+\\ &+\pi\cos(\pi y)\left(1+\frac{1}{12y}+\frac{1}{288y^2}-\frac{139}{51840y^3}-\frac{571}{2488320y^4}\right)-\\ &\left.-\sin(\pi y)\left(-\frac{1}{12y^2}-\frac{1}{144y^3}+\frac{139}{17280y^4}-\frac{571}{622080y^5}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.3}$$

Las raíces, que buscamos, las obtenemos usando la recurrencia $y_{n+1} = y_n - \dfrac{g'(y_n)}{g(y_n)}$. Ahora, dado que hay dos soluciones en el intervalo $x \in]-3,-2[$ y que $-x = y$, entonces las soluciones (para y) las encontraremos en $y \in]2,3[$. Probaremos, en primer lugar, con y_0 tal que $-x_0$ está más cerca de la asíntota $x=-2$, esto es, usaremos $x_0 = -2,25$. Esto es: $y_0 = 2,25$, lo que, luego de algunas iteraciones, nos da que:

$$y \approx 2,2192646352.$$

Ahora, para encontrar la segunda solución, hacemos la recurrencia con un x más cercano a

la asíntota $x = -3$, esto es $x_0 = -2,75$, o sea empezaremos la recurrencia con $y_0 = 2,75$, lo que, luego de algunas iteraciones, nos da:

$$y \approx 2,9047877691,$$

es decir, que las soluciones de la ecuación $2\Gamma(y+1)\sin(\pi y) - \pi = 0$ en el intervalo $]2,3[$ son:

$$y_1 \approx 2,2192646352$$
$$y_2 \approx 2,9047877691$$

como $x = -y$ tenemos que las soluciones de la ecuación $\Gamma(x) = -2$ para $x \in]-3,-2[$ son :

$$x_1 \approx -2,2192646352$$
$$x_2 \approx -2,9047877691.$$

Ahora, el siguiente paso será calcular $|\Gamma'(x)|$ para los valores de la soluciones $\Gamma(x) = -2$ en el intervalo $]-3,-2[$, para ello usaremos la fórmula de reflexión de la función digamma, es decir, usaremos la igualdad:

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x).$$

1) Para $x \approx -2,2192646352$:

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x),$$

entonces

$$\Psi(1+2,2192646352) - \Psi(-2,2192646352) = \pi \cot(-2,2192646352 \cdot \pi)$$

$$\Psi(-2,2192646352) = \Psi(3,2192646352) - \pi \cot(-2,2192646352 \cdot \pi).$$

Para calcular $\Psi(3,2192646352)$ usamos la aproximación de la función digamma:

$$\Psi(x) \approx \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4},$$

por lo tanto,

$$\Psi(3,2192646352) \approx 1,0058746602,$$

entonces

$$\begin{aligned}\Psi(-2,2192646352) &\approx 1,0058746602 + 3,8154458674\\ &\approx 4,8213205276\\ \frac{\Gamma'(-2,2192646352)}{\Gamma(-2,2192646352)} &\approx 4,8213205276\\ \Gamma'(-2,2192646352) &\approx 4,8213205276 \cdot \Gamma(-2,2192646352).\end{aligned}$$

Ahora para calcular $\Gamma(-2,2192646352)$ usamos la fórmula de recurrencia de la función Gamma varias veces, es decir:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \ldots = \frac{\Gamma(x+4)}{x(x+1)(x+2)(x+3)},$$

entonces tenemos que:

$$\Gamma(-2,2192646352) = \frac{\Gamma(1,7807353648)}{-0,4632116915}.$$

Ahora para calcular $\Gamma(1,7807353648)$ usamos la aproximación de Stirling–De Moivre para $x > 0$:

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4}\right)$$

cuyo valor es:

$$\Gamma(1,7807353648) \approx 0,9263778450,$$

entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(-2,2192646352) =& \frac{\Gamma(1,7807353648)}{-0,4632116915}\\ =& \frac{0,9263778450}{-0,4632116915},\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\Gamma(-2,2192646352) \approx -1,9999016905$$

y con ello tenemos que:

$$\begin{aligned}\Gamma'(-2,2192646352) \approx& 4,8213205276 \cdot -1,9999016905\\ \approx& -9,6421670738.\end{aligned}$$

2) Para $x \approx -2,9047877691$:

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x),$$

entonces

$$\Psi(1+2,9047877691) - \Psi(-2,9047877691) = \pi \cot(-2,9047877691 \cdot \pi)$$

$$\Psi(-2,9047877691) = \Psi(3,9047877691) - \pi \cot(-2,9047877691 \cdot \pi).$$

Para calcular $\Psi(3,9047877691)$ usamos la aproximación de la función digamma:

$$\Psi(x) \approx \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4},$$

por lo tanto,

$$\Psi(3,9047877691) \approx 1,2287259217,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Psi(-2,9047877691) &\approx 1,2287259217 - 10,1877321892 \\
&\approx -8,9590062675 \\
\frac{\Gamma'(-2,9047877691)}{\Gamma(-2,9047877691)} &\approx -8,9590062675 \\
\Gamma'(-2,9047877691) &\approx -8,9590062675 \cdot \Gamma(-2,9047877691).
\end{aligned}$$

Ahora para calcular $\Gamma(-2,9047877691)$ usamos la fórmula de recurrencia de la función Gamma varias veces, es decir:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \ldots = \frac{\Gamma(x+4)}{x(x+1)(x+2)(x+3)},$$

entonces tenemos que:

$$\Gamma(-2,9047877691) = \frac{\Gamma(1,0952122309)}{-0,4766509504}.$$

Ahora para calcular $\Gamma(1,0952122309)$ usamos la aproximación de Stirling–De Moivre para $x > 0$:

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4}\right)$$

cuyo valor es:

$$\Gamma(1,0952122309) \approx 0,9529790219,$$

entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(-2,9047877691) &= \frac{\Gamma(1,0952122309)}{-0,4766509504}\\ &= \frac{0,9529790219}{-0,4766509504},\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\Gamma(-2,9047877691) \approx -1,9993226093$$

y con ello tenemos que:

$$\begin{aligned}\Gamma'(-2,9047877691) &\approx -8,9590062675 \cdot -1,9993226093\\ &\approx 17,9119437875.\end{aligned}$$

Para ambos valores:

$$\begin{aligned}x &\approx -2,2192646352\\ x &\approx -2,9047877691\end{aligned}$$

tenemos que $|\Gamma'(x)| > 8$.

Para encontrar las soluciones de la ecuación $\Gamma(x) = -2$, para $x \in]-5,-4[$, usaremos nuevamente las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3). Las raíces, que buscamos, las obtenemos usamos la recurrencia: $y_{n+1} = y_n - \dfrac{g'(y_n)}{g(y_n)}$. Ahora, dado que hay 2 soluciones en el intervalo $x \in]-5,-4[$ y como $y = -x$, entonces las soluciones están en $y \in]4,5[$. Primero probaremos con y_0 más cerca de la asíntota $x = -4$, por ejemplo con $x_0 = -4,25$, o sea en nuestro caso con $y = 4,25$, nos da, luego de algunas iteraciones, que:

$$y \approx 4,0202211103.$$

Ahora, considerando un x más cercano a la asíntota $x = -5$, por ejemplo $x_0 = -4,75$, o sea, en nuestro caso con $y = 4.75$; tenemos, luego de algunas iteraciones, que:

$$y \approx 4,9958032768,$$

es decir, las soluciones de la ecuación $2\Gamma(y+1)\sin(\pi y) - \pi = 0$, en el intervalo $]4,5[$ son:

$$\begin{aligned}y_1 &\approx 4,0202211103\\ y_2 &\approx 4,9958032768,\end{aligned}$$

pero como $x = -y$ tenemos que las soluciones para la ecuación $\Gamma(x) = -2$ son :

$$x_1 \approx -4,0202211103$$
$$x_2 \approx -4,9958032768.$$

Ahora el siguiente paso será calcular $|\Gamma'(x)|$ para los valores de la soluciones $\Gamma(x) = -2$ en el intervalo $]-5,-4[$. Para ello usaremos la fórmula de reflexión de la función digamma. A saber:

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x).$$

1) Para $x \approx -4,0202211103$:

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x),$$

entonces

$$\Psi(1+4,0202211103) - \Psi(-4,0202211103) = \pi \cot(-4,0202211103 \cdot \pi)$$

$$\Psi(-4,0202211103) = \Psi(5,020221110) - \pi \cot(-4,0202211103 \cdot \pi).$$

Para calcular $\Psi(5,0202211103)$ usamos la aproximación de la función digamma:

$$\Psi(x) \approx \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4},$$

por lo tanto,

$$\Psi(5,0202211103) \approx 1,5105833571,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Psi(-4,0202211103) &\approx 1,5105833571 + 49,3867259555 \\
&\approx 50,8973093126 \\
\frac{\Gamma'(-4,0202211103)}{\Gamma(-4,0202211103)} &\approx 50,8973093126 \\
\Gamma'(-4,0202211103) &\approx 50,8973093126 \cdot \Gamma(-4,0202211103).
\end{aligned}$$

Ahora para calcular $\Gamma(-4,0202211103)$ usamos la fórmula de recurrencia de la función Gamma varias veces, es decir:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \ldots = \frac{\Gamma(x+6)}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)},$$

entonces tenemos que:

$$\Gamma(-4,0202211103) = \frac{\Gamma(1,9797788897)}{-0,4958096386}.$$

Ahora para calcular $\Gamma(1,9797788897)$ usamos la aproximación de Stirling–De Moivre para $x > 0$:

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4}\right)$$

cuyo valor es:

$$\Gamma(1,9797788897) \approx 0,9915966971,$$

entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(-4,0202211103) =& \frac{\Gamma(1,9797788897)}{-0,4958096386}\\ =& \frac{0,9915966971}{-0,4958096386},\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\Gamma(-4,0202211103) \approx -1,9999544581$$

y con ello tenemos que:

$$\begin{aligned}\Gamma'(-4,0202211103) \approx& 50.8973093126 \cdot -1,9999544581\\ \approx& -101,7923006650.\end{aligned}$$

2) Para $x \approx -4,9958032768$:

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x),$$

entonces

$$\Psi(1+4,9958032768) - \Psi(-4,9958032768) = \pi \cot(-4,9958032768 \cdot \pi)$$

$$\Psi(-4,9958032768) = \Psi(5,9958032768) - \pi \cot(-4,9958032768 \cdot \pi).$$

Para calcular $\Psi(5,9958032768)$ usamos la aproximación de la función digamma:

$$\Psi(x) \approx \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4},$$

por lo tanto,

$$\Psi(5,9958032768) \approx 1,7053565003,$$

entonces

$$\begin{aligned}\Psi(-4,9958032768) &\approx 1,7053565003 - 238,2673359476\\ &\approx -236,5619794473\\ \frac{\Gamma'(-4,9958032768)}{\Gamma(-4,9958032768)} &\approx -236,5619794473\\ \Gamma'(-4,9958032768) &\approx -236,5619794473 \cdot \Gamma(-4,9958032768).\end{aligned}$$

Ahora para calcular $\Gamma(-4,9958032768)$ usamos la fórmula de recurrencia de la función Gamma varias veces, es decir:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+7)}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)},$$

entonces tenemos que:

$$\Gamma(-4,9958032768) = \frac{\Gamma(2.0041967232)}{-0,5008908827}.$$

Ahora para calcular $\Gamma(2,0041967232)$ usamos la aproximación de Stirling–De Moivre para $x > 0$:

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4}\right)$$

cuyo valor es:

$$\Gamma(2,0041967232) \approx 1,0017607198,$$

entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(-4,9958032768) &= \frac{\Gamma(2,0041967232)}{-0,5008908827}\\ &= \frac{1,0017607198}{-0,5008908827}\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\Gamma(-4,0202211103) \approx -1,9999579837$$

y con ello tenemos que:

$$\begin{aligned}\Gamma'(-4,9958032768) &\approx -236,5619794473 \cdot -1,9999579837\\ &\approx 473,1140194355.\end{aligned}$$

Para ambos valores: $x \approx -4,0202211103$ y $x \approx -4,9958032768$ tenemos que $|\Gamma'(x)| >$

8.

En resumen: en los intervalos $]-3,-2[$ y $]-5,-4[$, las soluciones de $\Gamma(x) = -2$, tenemos que:

x	$\Psi(x)$	$\Gamma'(x)$
$-2,2192646352$	$4,8213205276$	$-9,6421670738$
$-2,9047877691$	$-8,9590062675$	$17,9119437875$
$-4,0202211103$	$50,8973093126$	$-101,7923006650$
$-4,9958032768$	$-236,5619794473$	$473,1140194355$

Cuadro 2.2: Tabla de valores para las soluciones de la ecuación $\Gamma(x) = -2$ en $]-3,-2[$ y $]-5,-4[$.

2.4 La Entropía Topológica

2.4.1 La definición de Adler-Konheim y Mc Andrews

La definición de entropía que usaremos se debe a Adler, Konheim y McAndrew (1965).

En lo que sigue $M \neq \emptyset$ y τ será una topología en M tal que (M,τ) es un espacio compacto.

Por la compacidad de (M,τ) sabemos que si $\mathcal{A} \subset \tau$ es un cubrimiento por abiertos de M, entonces existe $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, que es un subcubrimiento por abiertos de M y que posee un número finito de elementos. Esto es la cardinalidad de $\mathcal{A}'$, denotada $\#(\mathcal{A}')$, satisface $1 \leqslant \#(\mathcal{A}') < \infty$, con $\#(\mathcal{A}') \in \mathbb{N}$.

Así, podemos definir el número

$$N(\mathcal{A}) = \min\{\#(\mathcal{A}') : \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \text{ es un cubrimiento finito de } M\}.$$

Definición 2.4.1. Diremos que el subcubrimiento $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ es **minimal**, si:

a) $\#(\mathcal{A}') < \infty$.

b) No existe $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$ subcubrimiento finito tal que $\#(\mathcal{A}'') < \#(\mathcal{A}')$.

Definición 2.4.2. Se define la **entropía del cubrimiento abierto** $\mathcal{A} \subset \tau$ como el número $H(\mathcal{A}) = \log(N(\mathcal{A}))$.

Notamos que $N(\mathcal{A}) = e^{H(\mathcal{A})} \geqslant 1$, por lo que $H(\mathcal{A}) \in [0,\infty[$.
En lo que sigue $\mathscr{C}(M) = \{\mathcal{A} \subset \tau; \mathcal{A} \text{ es cubrimiento de } M\}$ denotará el conjunto de todos los cubrimientos por abiertos de M.

Definición 2.4.3. Para $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$, se define la **junción** de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$.

Es claro que la junción es una función $\vee : \mathscr{C}(M) \times \mathscr{C}(M) \to \mathscr{C}(M)$, $\vee(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

Además, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ y vale $\mathcal{A} \vee \mathcal{A} = \mathcal{A}$ sólo si ocurre que los elementos de $\mathcal{A}$ son dos a dos disjuntos y el cubrimiento $\mathcal{A}$ contiene al vacío. Caso contrario, la inclusión será estricta.

Definición 2.4.4. Diremos que un cubrimiento $\mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$ es un **refinamiento** del cubrimiento $\mathcal{A} \in \mathscr{C}(M)$, denotado $\mathcal{A} < \mathcal{B}$, si $\forall B \in \mathcal{B}\ \exists A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A$.

Definición 2.4.5. Un cubrimiento por abiertos $\mathcal{A}$ se dice *nbd-finito* si todo $x \in X$ tiene una vecindad V_x tal que $V_x \cap A \neq \emptyset$ sólo para un número finito de elementos $A \in \mathcal{A}$.

Propiedades de $\vee$ y $<$

1. Sea $\mathcal{A}_0 = \{M\}$. Es claro que $\mathcal{A}_0 \in \mathscr{C}(M)$ y que $\forall \mathcal{A} \in \mathscr{C}(M)$ se tiene que $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0 \vee \mathcal{A} = \mathcal{A}$, es decir, $\mathcal{A}_0$ es el elemento neutro de la junción. Además, $\mathcal{A}_0 < \mathcal{A}$, $\forall \mathcal{A} \in \mathscr{C}(M)$.

2. Se cumple que $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$, $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$. O sea la junción es conmutativa en $\mathscr{C}(M)$.Esto sigue de $A \cap B = B \cap A$, para cualquier par de conjuntos A, B.

3. Se cumple que $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}$, $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathscr{C}(M)$. Esto sigue del hecho que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ para conjuntos A, B, C cualesquiera. Así, la junción es asociativa en $\mathcal{C}(M)$.

4. $\forall \mathcal{A} \in \mathscr{C}(M)$ vale $\mathcal{A} < \mathcal{A}$.O sea, la relación de refinamiento es refleja en $\mathcal{C}(M)$.

5. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbb{C} \in \mathscr{C}(M)$ entonces, si $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} < \mathcal{C}$ resulta ser $\mathcal{A} < \mathcal{C}$. O sea, la relación de refinamiento es transitiva en $\mathcal{C}(M)$.

   Prueba. En efecto, sea $C \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{B} < \mathcal{C}$ existe $B(C) \in \mathcal{B}$ tal que $C \subset B(C) = B$. Como $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ existe $A = A(B) \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A$, luego $C \subset B \subset A$ implica $C \subset A$. Así, $\forall C \in \mathcal{C}$ existe $A = A(C) \in \mathcal{A}$ tal que $C \subset A \therefore \mathcal{A} < \mathcal{C}$. □

   Observação. a) Como $<$ satisface las propiedades 4 y 5, entonces constituye un casi orden reflexivo entre elementos de $\mathscr{C}(M)$. No es un orden parcial pues no cumple la propiedad de antisimetría. Por ejemplos, los cubrimientos

$$\mathcal{A} = \left\{ B\left(0, \frac{1}{n}\right); n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{B(0,2)\}$$

y

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(0, \frac{2}{n}\right); n \in \mathbb{N} \right\}$$

de la bola cerrada de centro $0 \in \mathbb{R}^n$ y radio 1 satisfacen $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} < \mathcal{A}$ y no son iguales entre ellos.

b) La relación de refinamiento no es simétrica. Esto es claro, ya que $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{C}(M)$ vale $\mathcal{A}_0 < \mathcal{A}$ para $\mathcal{A}_0 = \{M\}$.

6. Si $\mathcal{A} < \mathcal{A}'$ y $\mathcal{B} < \mathcal{B}'$, entonces $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} < \mathcal{A}' \vee \mathcal{B}'$.

Prueba. Sean $A' \in \mathcal{A}'$, $B' \in \mathcal{B}'$ y consideramos $A' \cap B'$. Como $\mathcal{A} < \mathcal{A}'$ existe $A = A(A') \in \mathcal{A}$ tal que $A' \subset A$. Como $\mathcal{B} < \mathcal{B}'$ existe $B = B(B') \in \mathcal{B}$ tal que $B' \subset B$. Luego $A' \cap B' \subset A \cap B$. Así $\forall A' \cap B' \in \mathcal{A}' \vee \mathcal{B}'$ existe $A \cap B \in \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ tal que $A' \cap B' \subset A \cap B$. Esto implica que $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} < \mathcal{A}' \vee \mathcal{B}'$. □

7. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$. Como $\mathcal{A}_0 = \{M\} < \mathcal{B}$; $\mathcal{B} < \mathcal{B}$; $\mathcal{U} < \mathcal{U}$ se tiene $\mathcal{A}_0 \vee \mathcal{U} < \mathcal{U} \vee \mathcal{B}$, o sea, $\forall \mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$ vale $\mathcal{U} < \mathcal{U} \vee \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} < \mathcal{U} \vee \mathcal{B}$. De aquí concluimos lo siguiente: para cada par $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$ existe $\mathcal{A} \in \mathscr{C}(M)$ tal que $\mathcal{U} < \mathcal{A}$ y $\mathcal{B} < \mathcal{A}$. En efecto, basta tomar $\mathcal{A} = \mathcal{U} \vee \mathcal{B}$.

8. Si $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$ y $\mathcal{U} < \mathcal{B}$ entonces $N(\mathcal{U}) \leqslant N(\mathcal{B})$ (y consecuentemente $H(\mathcal{U}) \leqslant H(\mathcal{B})$).

Prueba. En efecto, sea $\mathcal{B}' = \{B_1, \ldots, B_k\}$ un subcubrimiento minimal de $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{U} < \mathcal{B}$, para cada i existe $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $B_i \subset U_i$. Se sigue que $U' = \{U_1, \ldots, U_k\}$ es un subcubrimiento de M. Así $N(\mathcal{U}) \leqslant k = N(\mathcal{B})$. □

9. Si $\mathcal{U} < \mathcal{B}$ entonces $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) = N(\mathcal{B})$ y $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) = H(\mathcal{B})$.

Prueba. Como $\mathcal{B} < \mathcal{U} \vee \mathcal{B}$, entonces de la propiedad 8, tenemos que:

$$N(\mathcal{B}) \leqslant N(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}). \tag{*}$$

La hipótesis $\mathcal{U} < \mathcal{B}$ dice que para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $U = U(B) \in \mathcal{U}$ tal que $B \subset U(B)$. En particular $B \subset B \cap U(B)$ $\therefore$ $\forall B \in \mathcal{B}$, existe $B \cap U(B) \in \mathcal{B} \vee \mathcal{U}$ tal que $B \subset B \cap U$, es decir, $\mathcal{U} \vee \mathcal{B} < \mathcal{B}$. Aplicando lo probado en 8:

$$N(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) \leqslant N(\mathcal{B}). \tag{**}$$

De (*) y (**) concluimos que $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) = N(\mathcal{B})$. □

10. Para todo $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$ vale $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) \leqslant N(\mathcal{U})N(\mathcal{B})$ (y consecuentemente $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) \leqslant H(\mathcal{U}) + H(\mathcal{B})$).

Prueba. Sean los conjuntos $\mathcal{U}' = \{U_1, \ldots, U_{N(\mathcal{U})}\}$, $\mathcal{B}' = \{B_1, \ldots, B_{N(\mathcal{B})}\}$ subcubrimientos minimales de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente. Se tiene que:

$$\mathcal{U}' \vee \mathcal{B}' = \left\{U_i \cap B_j; i = 1, \ldots N(\mathcal{U}), j = 1, \ldots, N(\mathcal{B})\right\}$$

es un subcubrimiento de $\mathcal{U} \vee \mathcal{B}$, por lo tanto, $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) \leqslant N(\mathcal{U})N(\mathcal{B})$. □

Consideremos ahora $\varphi : M \to M$ una aplicación continua. Para cada $\mathcal{U} \in \mathscr{C}(M)$ sea $\varphi^{-1}(\mathcal{U}) = \left\{\varphi^{-1}(U); U \in \mathcal{U}\right\}$. Es claro que $\varphi^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathscr{C}(M)$.

11. Si $\mathcal{U} < \mathcal{B}$ entonces $\varphi^{-1}(\mathcal{U}) < \varphi^{-1}(\mathcal{B})$.

Prueba. Para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $B \subset U$. De aquí:

$$\varphi^{-1}(B) \subset \varphi^{-1}(U) \Rightarrow \varphi^{-1}(\mathcal{U}) < \varphi^{-1}(\mathcal{B}).$$

□

12. Si $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$, entonces $\varphi^{-1}(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) = \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \varphi^{-1}(\mathcal{B})$.
(Esto es, la aplicación $\varphi^{-1} : \mathscr{C}(M) \to \mathscr{C}(M)$ es un $(\mathscr{C}(M), \vee)$-morfismo).

Prueba. Sigue del hecho que $\varphi^{-1}(A \cap B) = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B)$ para cualquier par de conjuntos $A, B \subset M$. □

13. Para todo $\mathcal{U} \in \mathscr{C}(M)$ vale $N\left(\varphi^{-1}(\mathcal{U})\right) \leqslant N(\mathcal{U})$.

Prueba. Sea $\mathcal{U}' = \left\{U_1, \ldots, U_{N(\mathcal{U})}\right\}$ un subcubrimiento minimal de $\mathcal{U}$, entonces $\varphi^{-1}(\mathcal{U}') = \left\{\varphi^{-1}(U_1), \ldots, \varphi^{-1}(U_{N(\mathcal{U})})\right\}$ es un subcubrimiento de $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$. De aquí que $N\left(\varphi^{-1}(\mathcal{U})\right) \leqslant N(\mathcal{U})$. □

14. Si $\varphi : M \to M$ es sobreyectiva, entonces $N\left(\varphi^{-1}(\mathcal{U})\right) = N(\mathcal{U})$.

Prueba. Sea $\mathcal{U}'_\varphi = \left\{\varphi^{-1}(U_1), \ldots, \varphi^{-1}\left(U_{N(\varphi^{-1}(U))}\right)\right\}$ un subcubrimiento minimal de $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$. Tenemos :

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{N(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))} \varphi^{-1}(U_j)$$

Entonces:

$$\varphi(M) \subset \varphi\left(\bigcup_{j=1}^{N(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))} \varphi^{-1}(U_j)\right)$$

Como $\varphi\left(\bigcup_{j=1}^{N(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))}\varphi^{-1}(U_j)\right)\subset\bigcup_{j=1}^{N(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))}\varphi\left(\varphi^{-1}(U_j)\right)$; $\varphi(\varphi^{-1}(U_j))\subset U_j$ y φ es sobreyectiva, se cumple que:

$$\varphi(M)=M\subset\bigcup_{j=1}^{N(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))}\varphi\left(\varphi^{-1}(U_j)\right)=\bigcup_{j=1}^{N(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))}U_j.$$

Esto es: $\left\{U_1,\ldots,U_{N\left(\varphi^{-1}(U)\right)}\right\}$ es un subcubrimiento por abiertos de $\mathcal{U}$, por lo tanto:

$$N(\mathcal{U})\leqslant N\left(\varphi^{-1}(\mathcal{U})\right).$$

Combinando esta desigualdad con la desigualdad de la propiedad 13 tenemos el resultado. □

15. Para cada $\mathcal{U}\in\mathscr{C}(M)$ se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}\varphi^{-k}(\mathcal{U})\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\mathcal{U}\vee\varphi^{-1}(\mathcal{U})\vee\ldots\vee\varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}))$$

existe y es finito.

Para demostrar este resultado, probaremos lo siguiente:

Lema 2.3. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales no negativos que satisface*

$$a_{n+m}\leqslant a_n+a_m;\forall n,m\in\mathbb{N},\ \textit{entonces existe}\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$$

Prueba. La condición $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$ implica que $a_{kn}\leqslant ka_n$ y así

$$\frac{1}{kn}a_{kn}\leqslant\frac{a_n}{n}.$$

Haciendo $k\to\infty$ concluimos que $c=\inf\left(\frac{a_p}{p}\right)\leqslant\frac{a_n}{n}\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Dado $\epsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\dfrac{a_{n_0}}{n_0}\leqslant c+\epsilon$. Así, para $n>n_0$ escribimos $n=n_0p+q$ con $p\in\mathbb{N}, 0\leqslant q<n_0$. Luego

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n_0p+q}}{n_0p+q}\leqslant\frac{pa_{n_0}+a_q}{p\left(n_0+\frac{q}{p}\right)}\leqslant\frac{a_{n_0}}{n_0+\frac{q}{p}}+\frac{a_q}{pn_0+q}\leqslant$$

$$\frac{a_{n_0}}{n_0}+\frac{a_q}{n}\leqslant c+\epsilon+\frac{a_q}{n}\leqslant c+\epsilon+\frac{1}{n}\sup\{a_i;0\leqslant i<n_0\}.$$

Así para n grande $\frac{a_n}{n} \leqslant c + 2\epsilon$. Como $c \leqslant \frac{a_n}{n} \leqslant c + 2\epsilon$ concluimos que $c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$. □

Prueba. (De la propiedad 15) Sea

$$a_n = H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U})\right) = H\left(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U})\right)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} a_{n+m} =& H\Big(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}) \vee \\ & \vee \varphi^{-n}(\mathcal{U}) \vee \varphi^{-n-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \varphi^{-n-m+1}(\mathcal{U})\Big) \\ =& H\Big(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}) \vee \\ & \vee \varphi^{-n}(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \varphi^{-(m-1)}(\mathcal{U}))\Big). \end{aligned}$$

De acuerdo a la propiedad 10, tenemos

$$\begin{aligned} a_{n+m} \leqslant& H\left(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}))\right) + \\ & + H\left(\varphi^{-n}\left(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \varphi^{-(m-1)}(\mathcal{U})\right)\right). \end{aligned}$$

Usando la propiedad 13, tenemos

$$\begin{aligned} a_{n+m} \leqslant& H\left(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U})\right) + \\ & + H\left(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \varphi^{-(m-1)}(\mathcal{U})\right), \end{aligned}$$

es decir, $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$.

De la definición de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene que $a_n \geqslant 0$. Así, obtenemos que existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U})\right).$$

□

Definición 2.4.6. Para cada $\mathcal{U} \in \mathscr{C}(M)$ y $\varphi : M \to M$ continua, la **entropía** de φ respecto de $\mathcal{U}$ es el número:

$$h(\varphi,\mathcal{U}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U})\right).$$

$a_1 = H(\mathcal{U}); a_n \leqslant a_{n\cdot 1} \leqslant n \cdot a_1$, se tiene $\frac{1}{n}a_n \leqslant a_1$, esto es:

16. Para cada $\mathcal{U} \in \mathscr{C}(M)$ y $\varphi : M \to M$ continua, se tiene que:

$$h(\varphi,\mathcal{U}) \leqslant H(\mathcal{U}) = \log(N(\mathcal{U})).$$

Prueba. Como $a_1 = H(\mathcal{U})$ y $a_n = a_{n\cdot 1} \leqslant n \cdot a_1$, se tiene $\frac{1}{n}a_n \leqslant a_1$. Por lo tanto, $\dfrac{a_n}{n} \leqslant a_1$, tomando, ahora, el límite cunado $n \to \infty$, tenemos el resultado. □

17. Si $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$ satisfacen $\mathcal{U} < \mathcal{B}$, entonces $h(\varphi,\mathcal{U}) \leqslant h(\varphi,\mathcal{B})$.

Prueba. De la propiedad 11, tenemos que $\mathcal{U} < \mathcal{B}$, entonces $\varphi^{-k}(\mathcal{U}) < \varphi^{-k}(\mathcal{B})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Aplicando la propiedad 6, obtenemos:

$$\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}) < \mathcal{B} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{B}) \vee \ldots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{B}).$$

De la propiedad 8, obtenemos que

$$H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U})\right) \leqslant H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{B})\right).$$

Luego, $h(\varphi,\mathcal{U}) \leqslant h(\varphi,\mathcal{B})$. □

18. Si $\mathcal{U} \in \mathscr{C}(M)$ y $\varphi : M \to M$ es un homeomorfismo, entonces $h(\varphi,\mathcal{U}) = h\left(\varphi^{-1},\mathcal{U}\right)$.

Prueba. De acuerdo a la propiedad 14,

$$N\left(\varphi(\mathcal{U})\right) = N\left(\varphi^{-1}\left(\varphi(\mathcal{U})\right)\right) = N(\mathcal{U}).$$

Así,

$$H\Big(\mathcal{U} \vee \varphi(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \varphi^{n-1}(\mathcal{U})\Big) = H\Big(\varphi^{n-1}\Big(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee$$
$$\ldots \vee \varphi^{-(n-1)}\Big(\mathcal{U}\Big)\Big)\Big) = H\Big(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U})\Big).$$

dividiendo por n y pasando al límite, cuando $n \to \infty$, se tiene el resultado. □

Definición 2.4.7. Sea $\varphi : M \to M$ una aplicación continua. Se define la **entropía topológica** de φ como $h(\varphi) = \sup\{h(\varphi, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathscr{C}(M)\}$.

Nota. Observamos que $0 \leqslant h(\varphi) \leqslant \infty$.

Definición 2.4.8. Diremos que una sucesión de cubrimientos abiertos $\{\mathcal{U}_n; n \in \mathbb{N}\}$ es **refinante** si:

1. $\mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Para cada $\mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$ existe $\mathcal{U}_n$ tal que $\mathcal{B} < \mathcal{U}_n$.

Lo interesante de una sucesión de cubrimientos abiertos refinante, es el siguiente lema.

Lema 2.4. *Si* $(\mathcal{U}_n)$ *es una sucesión de cubrimientos abiertos refinantes, entonces* $h(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} h(\varphi, \mathcal{U}_n)$.

Prueba. La propiedad 1 implica $h(\varphi, \mathcal{U}_n) \leqslant h(\varphi, \mathcal{U}_{n+1})$. Así que:

$$\lim_{n\to\infty} h(\varphi, \mathcal{U}_n) = \sup\{h(\varphi, \mathcal{U}_n); n \in \mathbb{N}\}.$$

La definición de $h(\varphi)$ implica que para cada $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{B}_\epsilon \in \mathscr{C}(M)$ tal que $h(\varphi) \leqslant h(\varphi, \mathcal{B}_\epsilon) + \epsilon$. La propiedad 3 dice que existe $\mathcal{U}_n$ tal que $\mathcal{B}_\epsilon < \mathcal{U}_n$. De aquí $h(\varphi, \mathcal{B}_\epsilon) \leqslant h(\varphi, \mathcal{U}_n)$ y luego tenemos que:

$$h(\varphi) \leqslant h(\varphi, \mathcal{U}_n) + \epsilon \leqslant h\left(\varphi, \mathcal{U}_{n+p}\right) + \epsilon, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Ya que $h\left(\varphi, \mathcal{U}_{n+p}\right) \leqslant h(\varphi) \leqslant h\left(\varphi, \mathcal{U}_{n+p}\right) + \epsilon, \forall p \in \mathbb{N}$, debe ser entonces que $h(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} h(\varphi, \mathcal{U}_n)$.

□

2.4.2 Cálculo de la Entropía en Espacios Métricos

Suponemos que (M, d) es un espacio métrico compacto.

Definición 2.4.9.

1. Para $A \subset M$, se define el **diámetro** del conjunto A como $d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

2. Para $\mathcal{U} \in \mathscr{C}(M)$ se define $d(\mathcal{U}) = \sup\{d(U); U \in \mathcal{U}\}$.

Observação. Si $\mathcal{U}, \mathcal{B}$ son cubrimientos abiertos de M tales que $\mathcal{U} < \mathcal{B}$ entonces $d(\mathcal{B}) \leqslant d(\mathcal{U})$. En efecto, $\forall B \in \mathcal{B}$ existe $U(B) \in \mathcal{U}$ tal que $B \subset U(B)$ entonces $d(B) \leqslant d(U(B))$. Así $d(\mathcal{B}) = \sup\{d(B); B \in \mathcal{B}\} \leqslant \sup\{d(U(B)); B \in \mathcal{B}\} \leqslant d(\mathcal{U})$.

Probemos, ahora, el siguiente resultado:

Lema 2.5. *(del cubrimiento de Lebesgue) Sea $\mathcal{U} \in \mathscr{C}(M)$, entonces existe $\epsilon(\mathcal{U}) > 0$ tal que si $x \in M$ y $B_r(x) = \{y \in M; d(x,y) < r\}$ satisface $r < \epsilon(\mathcal{U})$, entonces $\exists U \in \mathcal{U}$ tal que $B_r(x) \subset U$.*

Prueba. Como $\mathcal{U} \in \mathscr{C}(M)$ existe subcubrimiento finito $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, sea $f_i : M \to [0, \infty[$ la función continua $f_i(x) = d(x, M \backslash U_i)$. Como $(M \backslash U_i)$ es cerrado, se cumple que $f_i(x) = 0 \iff x \in (M \backslash U_i)$.

Como para cada $x \in M$ existe $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x \in U_{i_0}$, entonces

$$f_{i_0}(x) > 0. \tag{2.4}$$

Sea $f : M \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$. De acuerdo a (2.4) se tiene que $f(x) > 0\ \forall x \in M$. Como f es una función continua, entonces $f(M) = [\delta_1, \delta_2]$ es un intervalo cerrado con $\delta_1 = \inf\{f(x); x \in M\} > 0$.

Sea $x \in M$ cualquiera y $0 < \delta < \delta_1$. Se cumple $f(x) \geqslant \delta$. Esto es, hay $l_x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $f_{l_x}(x) \geqslant \delta$. Esto implica que $d(x, M \backslash U_{l_x}) \geqslant \delta$. Luego, para cada $y \in B_\delta(x)$ debe ser que $y \in U_{l_x}$ pues $d(x,y) < \delta$.

Concluimos que $B_\delta(x) \subset U_{l_x}$.

□

Corolario 2.4.1. *Para cada $\mathcal{U} \in \mathscr{C}(M)$ existe $\epsilon = \epsilon(\mathcal{U}) > 0$ tal que si A es un conjunto abierto con $d(A) = \sup\{d(x,y); x, y \in A\} < \epsilon$, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U$.*

Prueba. Notamos que $A \subset B_{d(A)}(x)$ para cada $x \in A$. De aquí basta considerar $d(A) < \delta_1$ como en el lema de cubrimiento de Lebesgue. □

Observamos que si $0 < \delta < \epsilon(\mathcal{U})$ entonces δ satisface la propiedad. A saber, si $A \subset M$ es un conjunto tal que $d(A) < \delta$ entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U$. En efecto, como $\delta < \epsilon(\mathcal{U})$ sirve el mismo U del corolario 2.4.1 . Esto nos permite la siguiente definición:

Definición 2.4.10. Se define el **número de Lebesgue** de $\mathcal{U}$ como:

$$\delta(\mathcal{U}) = \sup\{\epsilon(\mathcal{U}); \epsilon(\mathcal{U}) \ \text{ satisface el corolario 2.4.1}\}.$$

Corolario 2.4.2. *Sea $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$. Sea $d(\mathcal{U}) = \sup\{d(U); U \in \mathcal{U}\}$. Si ocurre que $d(\mathcal{U}) < \delta(\mathcal{B})$, entonces $\mathcal{B} < \mathcal{U}$.*

Prueba. Para cada $U \in \mathcal{U}$ vale $d(U) < \delta(\mathcal{B})$, entonces $\exists B(U) \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset B(U)$, esto es, $\mathcal{B} < \mathcal{U}$. □

Corolario 2.4.3. *Sea $\{\mathcal{U}\} \subset \mathscr{C}(M)$ una sucesión de cubrimientos abiertos tales que:*

1. *$\mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n+1}$.*

2. *$d(\mathcal{U}_n) \to 0$, $n \to \infty$.*

Entonces $\{\mathcal{U}_n\}$ es una sucesión refinante.

Prueba. La primera propiedad es la primera parte de la definición de una sucesión refinante. Si $\mathcal{B} \in \mathscr{C}(M)$ es un cubrimiento abierto, entonces $\delta(\mathcal{B}) > 0$ y $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathcal{U}_n) < \delta(\mathcal{B})$. De acuerdo al corolario 2.4.2, $\mathcal{B} < \mathcal{U}_n$ (que es la segunda propiedad de un cubrimiento refinante). □

En particular, $h_{top}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} h(\varphi, \mathcal{U}_n)$ para cualquier $\varphi : M \to M$ continua y cualquier sucesión de cubrimientos $\{\mathcal{U}_n\}$ como en el corolario.

Veamos algúnos ejemplos de sucesiones que satisfacen el corolario anterior.

Ejemplo 2.4.1. Si consideramos $\mathcal{U}_n = \left\{B_r(x); x \in M, 2r < \dfrac{1}{n}\right\}$ el conjunto de todas las bolas abiertas de diámetro $d = 2r < \dfrac{1}{n}$, entonces la sucesión $\{\mathcal{U}_n; n \in \mathbb{N}\}$ es refinante.
En efecto, si $B_r(x) \in \mathcal{U}_{n+1}$, entonces $2r < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ y $B_r(x) \in \mathcal{U}_n$, por lo tanto, $\mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n+1}$.
Por otro lado $d(\mathcal{U}_n) = \sup\{d(U); U \in \mathcal{U}_n\} = \dfrac{1}{n}$ y así $d(\mathcal{U}_n) \to 0, n \to \infty$.

Ejemplo 2.4.2. Sea $\{\mathcal{B}_n\} \subset \mathscr{C}(M)$ una sucesión de cubrimientos abiertos tales que $d(\mathcal{B}_n) \to 0$, $n \to \infty$. Sea $\mathcal{U}_n = \displaystyle\bigvee_{k=1}^{n} \mathcal{B}_k$. Como $\mathcal{B}_n < \mathcal{U}_n$ entonces $d(\mathcal{U}_n) < d(\mathcal{B}_n)$ y luego, $d(\mathcal{U}_n) \to 0$, $n \to \infty$.
Además, como $\mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n+1}$ el corolario 2.4.3 garantiza que $\{\mathcal{U}_n\}$ es una sucesión refinante. O sea, a partir de cualquier sucesión de cubrimientos abiertos $\{\mathcal{B}_n\} \subset \mathscr{C}(M)$ tales que $d(\mathcal{B}_n) \to 0$, $n \to \infty$, se puede construir una sucesión refinante.

Ejemplo 2.4.3. Sea $\sigma : \Sigma_n \to \Sigma_n$, $\Sigma_n = \{\theta; \mathbb{N}_0 \to \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$ el conjunto de sucesiones de n- símbolos. Se tiene (ver Labarca (2011), sección 1.5) que $h_{top}(\sigma) = \log(n)$.

2.4.3 Extensión de la definición de entropía a espacios no compactos

Hasta ahora nuestra definición se aplica a espacios métricos compactos. Es claro que aplica, también, a espacios topológicos compactos. Vemos, ahora, la definición que usaremos para nuestro caso y que se refiere a espacios no compactos.

Antes de nada recordaremos, brevemente, algunas definiciones que vienen de la topología (ver Dugundji (1966))

Definición 2.4.11. Consideremos un espacio topológico (X, τ). Una familia de conjuntos $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_\oslash \subset \mathcal{X} | \oslash \in \mathcal{I}\}$ se denomina *vecindad-finito* si cada $x \in X$ tienen una vecindad abierta $V_x \subset X$ tal que $V_x \cap D_\alpha \neq \emptyset$ para, a lo más, una cantidad finita de índices $\alpha \in \mathcal{I}$.

Definición 2.4.12. Un espacio topológico (X, τ) se dice:

- *de Hausdorff* si separa puntos(para cada $x, y \in X$ existen abiertos U_x, U_y tales que $x \in U_x$ y $y \in U_y$ y se cumple que $U_x \cap U_y = \emptyset$);
- *segundo contable* si la topología tiene una base enumerable;
- *de Lindelöf* si todo cubrimiento por abiertos tiene subcubrimiento enumerable;
- *paracompacto* si todo cubrimiento por abiertos tiene un refinamiento abierto vecindad-finito;
- *localmente compacto* si cada $x \in X$ tienen una vecindad V_x tal que $\overline{V_x}$ es compacto;
- *σ-compacto* si es localmente compacto y puede expresarse como una unión enumerable de conjuntos compactos;

Para nuestros efectos (X, τ) será un espacio de Hausdorff, segundo contable, Lindelöf, paracompacto y σ-compacto. Por ejemplo: la recta real satisface todas estas propiedades y cualquier espacio euclidiano, también.

Definición 2.4.13. Se define $C_c(X, X)$ como el conjunto de funciones $f : X \to X$ tales que existe $K \subset X$ compacto para la cual la restricción $f|_K : K \to K$ es una aplicación continua.

Nota. Observamos lo siguiente:

a.) Para cualquiera $f \in C_c(X, X)$ y para cualquier compacto $K \subset X$ donde la restricción $f|_K : K \to K$ es continua, se puede calcular $h_{top}(f, K)$;

b.-) La unión finita de conjuntos compactos en un espacio Hausdorff es compacta;

c.-) Sea $f : X \to X$ una función y suponemos K_1 y K_2 son conjuntos compactos tales que $f|_{K_1}$ y $f|_{K_2}$ son continuas entonces $f|_{K_1 \cup K_2}$ es continua y, en este caso,

$$h_{top}(f, K_1 \cup K_2) = \max\{h_{top}(f, K_1), h_{top}(f, K_2)\}.$$

En lo que sigue, y para efectos de espacios (X, τ) no compactos, consideraremos la siguiente definición de entropía

Definición 2.4.14. Para $f \in C_c(X, X)$ sea

$$K_f = \{K \subset X |\, K \text{es compacto y } f|_K \text{ es continua}\}.$$

Se define

$$h_{top}(f, X) = \sup\left\{h_{top}(f, K) |\, K \in K_f\right\}.$$

2.4.4 Entropía topológica e hiperbolicidad en la Función Gamma

En esta sección probaremos que la entropía de la función Gamma es infinita y que su dinámica contiene un subconjunto invariante hiperbólico. Para ello, probaremos otros resultados primero.

Proposición 2.4.4. *Para cada $n \geqslant 1$ se cumple que:*

$$\Gamma''(x) < 0 \ \ \textit{para cada} \ \ x \in \left]-2n-1, -2n\right[.$$

Prueba. Usando la función digamma tenemos:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right)$$

derivando con respecto a x, tenemos:

$$\frac{\Gamma''(x)\cdot\Gamma(x) - [\Gamma'(x)]^2}{[\Gamma(x)]^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n-1)^2} > 0,$$

entonces

$$\frac{\Gamma''(x)\cdot\Gamma(x) - [\Gamma'(x)]^2}{[\Gamma(x)]^2} > 0$$

y como $[\Gamma(x)]^2 > 0$ obtenemos que: $\Gamma''(x)\cdot\Gamma(x) - [\Gamma'(x)]^2 > 0$, lo que implica $\Gamma''(x)\cdot\Gamma(x) > [\Gamma'(x)]^2$ y, como $[\Gamma'(x)]^2 \geqslant 0$, entonces $\Gamma''(x)\cdot\Gamma(x) > 0$. Ahora, dado que $x \in \left]-2n-1, -2n\right[$, se cumple $\Gamma(x) < 0$ y, por lo tanto $\Gamma''(x) < 0$; como señalado. □

Observação. a) De la proposición anterior concluimos que $\Gamma'(x)$, para $x \in]-2n-1, -2n[$ es decreciente, para cada $n \geqslant 0$.

b) Dado que $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, derivando tenemos que:

$$\Psi'(x) = \Psi_1(x) = \frac{\Gamma''(x)\cdot\Gamma(x) - [\Gamma'(x)]^2}{[\Gamma(x)]^2} > 0$$

de este hecho podemos concluir que la función digamma es creciente para $x > 0$ y para $x \in \left]-n-1, -n\right[$ con $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4.5. *Para cada $n \geqslant 1$ sean $-2n-1 < -x_2^n < -x_1^n < -y_2^n < -y_1^n < -2n$ puntos que satisfacen: $\Gamma\left(-x_2^n\right) = \Gamma\left(-y_1^n\right) = -2n-1$ y $\Gamma\left(-x_1^n\right) = \Gamma\left(-y_2^n\right) = -2$. Esto es: $\Gamma\left(\left[-x_2^n, -x_1^n\right]\right) = [-2n-1, -2]$ y $\Gamma\left(\left[-y_2^n, -y_1^n\right]\right) = [-2n-1, -2]$,*

entonces se cumple que:

$$\min\left\{\min\left\{\left|\Gamma'\left(-x_1^k\right)\right|,\left|\Gamma'\left(-y_2^k\right)\right|\right\},1\leqslant k\leqslant n\right\}\geqslant\lambda>1;$$

para algún $\lambda>1$.

Prueba. Dividiremos la demostración en dos partes:

a) $\left|\Gamma'(-y_2^k)\right|>8$ y

b) $\left|\Gamma'(-x_1^k)\right|>16$.

Antes de calcular la derivada en estos dos puntos, vemos otras relaciones que nos servirán en esta demostración.

Consideramos, para cada $1\leqslant k\leqslant n$, los puntos $-2k-1<-x_1^k<-y_2^k<-2k$. Ya vimos, en la sección 2.3.3, que: $-y_2^1\approx-2,2192646352$ y que $\Psi(-y_2^1)\approx 4.8213205276$. De este hecho tenemos que $\Psi(-y_2^1)>4$ y dado que $\Gamma(-y_2^1)=-2$ entonces:

$$\Psi(-y_2^1)=\frac{\Gamma'(-y_2^1)}{-2}>4\Rightarrow\Gamma'(-y_2^1)<-8,$$

por lo tanto,

$$\left|\Gamma'(-y_2^1)\right|>8. \tag{2.5}$$

También, vimos que $-x_1^1\approx-2.9047877691$ y $\Psi(-x_1^1)\approx-8.9590073177$. Luego, tenemos $\Psi(-x_1^1)<-8$ y dado que $\Gamma(-x_1^1)=-2$, entonces:

$$\Psi(-x_1^1)=\frac{\Gamma'(-x_1^1)}{-2}<-8\Rightarrow\Gamma'(-x_1^1)>16,$$

por lo tanto,

$$\left|\Gamma'(-x_1^1)\right|>16. \tag{2.6}$$

Ahora, dada la fórmula de recurrencia de la función digamma tenemos que: $\Psi(y)=\Psi(y+1)-\dfrac{1}{y}$. Aplicando esta relación a $y=-x-1$ tenemos que: $\Psi(-x-1)=\Psi(-x)+\dfrac{1}{1+x}$; aplicando la relación a $y=-x-2$ tenemos:

$$\Psi(-x-2)=\Psi(-1-x)+\frac{1}{x+2}=\Psi(-x)+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}.$$

Sucesivamente, obtenemos la relación:

$$\Psi(-x-2k)=\Psi(-x)+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+2k} \tag{2.7}$$

para $x > 0$ y $x \notin \mathbb{Z}^-$.
Ahora ya con las relaciones (2.5), (2.6) y (2.7) probemos los puntos a) y b).

a) Probemos primero que $\Gamma\left(-y_2^1 - 2k\right) > -2$, con esto concluíremos la desigualdad $-y_2^1 - 2k < -y_2^{k+1}$ para $1 \leqslant k \leqslant n$. En efecto, tenemos: $(-y_2^1 - 2k) \in]-2k-3, -2k-2[$ y $-y_2^{k+1} \in]-2k-3, -2k-2[$; es decir, ambos valores: $\left(-y_2^1 - 2k\right)$ y $-y_2^{k+1}$, están en el mismo intervalo.

   Probamos esta afirmación por inducción:

   - $k = 1$. En efecto, para obtener el valor: $\Gamma(-y_2^1 - 2)$ usamos la fórmula de recurrencia de la función Gamma, y tenemos que:

   $$\Gamma(-y_2^1 - 2) = \frac{\Gamma(-y_2^1 - 1)}{-y_2^1 - 2} = \frac{\Gamma(-y_2^1)}{(-y_2^1 - 2)(-y_2^1 - 1)},$$

   y dado que $\Gamma\left(-y_2^1\right) = -2$, entonces

   $$\Gamma\left(-y_2^1 - 2\right) = \frac{-2}{(-y_2^1 - 2)(-y_2^1 - 1)}.$$

   Como $-y_2^1 \approx -2.2192646352$ tenemos $-y_2^1 < -2$ y, entonces que $-y_2^1 - 2 < -4$ e $-y_2^1 - 1 < -3$, por lo tanto $(-y_2^1 - 2) \cdot (-y_2^1 - 1) > 12$, entonces

   $$\frac{-2}{(-y_2^1 - 2)(-y_2^1 - 1)} > -2, \quad \text{con lo que,} \quad \Gamma(-y_2^1 - 2) > -2.$$

   - Suponemos ahora que: $\Gamma(-y_2^1 - 2k) > -2$ y probemos que la relación se cumple para $k + 1$.

   Usando la fórmula de recurrencia de la función Gamma, tenemos:

   $$\Gamma\left(-y_2^1 - 2(k+1)\right) = \frac{\Gamma\left(-y_2^1 - 2k\right)}{\left(-y_2^1 - 2k - 2\right) \cdot \left(-y_2^1 - 2k - 1\right)}$$

   y dado que $-y_2^1 < -2$ entonces: $-y_2^1 - 2k - 2 < -2k - 4$ y $-y_2^1 - 2k - 1 < -2k - 3$; y luego tenemos que: $(-y_2^1 - 2k -) \cdot (-y_2^1 - 2k - 1) > (2k+4)(2k+3) > 12$ y, por lo tanto:

   $$\begin{aligned}\Gamma(-y_2^1 - 2(k+1)) &= \frac{\Gamma(-y_2^1 - 2k)}{(-y_2^1 - 2k - 2) \cdot (-y_2^1 - 2k - 1)} > \\ &> \frac{-2}{(-y_2^1 - 2k - 2) \cdot (-y_2^1 - 2k - 1)} > -2;\end{aligned}$$

como queríamos probar.

De este hecho podemos concluir que, puesto que: $\Gamma(-y_2^1 - 2k) > -2$, entonces se cumple que $-y_2^1 - 2k < -y_2^{k+1}$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.

Ahora dado el hecho de que $-y_2^1 - 2k$ y $-y_2^{k+1}$ están en el el mismo intervalo, $]-2k-3, -2k-$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, y usando el hecho de que la función digamma es creciente en $]-2k-3, -2k-2[$, ver observación , concluimos que:

$$\Psi(-y_2^1 - 2k) < \Psi(-y_2^{k+1}); \qquad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{2.8}$$

y como $\Psi(-y_2^1) < \Psi(-y_2^1 - 2k)$ por (2.7), de esto obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\Psi(-y_2^1) < \Psi(-y_2^1 - 2k) < \Psi(-y_2^{k+1}) \Rightarrow \Psi(-y_2^1) < \Psi(-y_2^{k+1})$$

y como $\Psi(-y_2^1) > 4$, entonces $\Psi(-y_2^{k+1}) > 4$ lo que implica $\dfrac{\Gamma'(-y_2^{k+1})}{\Gamma(-y_2^{k+1})} > 4$ y dado que $\Gamma(-y_2^{k+1}) = -2$, obtenemos que $\dfrac{\Gamma'(-y_2^{k+1})}{-2} > 4$, entonces $\Gamma'(-y_2^{k+1}) < -8$, por lo tanto, $\forall k \geqslant 1$ vale $|\Gamma'(-y_2^{k+1})| > 8$. Esto concluye la demostración de la afirmación a).

b) Para resolver esta parte, primero probemos que $(-x_1^k + 2k + 1) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Para ello veamos cuánto es el valor de $\lim\limits_{k\to\infty} \Gamma(-x_1^k + 2k + 1)$.

Usando la fórmula de recurrencia de la función Gamma, tenemos que :

$$\Gamma(-x_1^k + 2k + 1) = (-x_1^k)(-x_1^k + 1)\cdots(-x_1^k + 2k)\Gamma(-x_1^k)$$

para $k \in \mathbb{N}$ y como $\Gamma(-x_1^k) = -2$, entonces

$$\Gamma(-x_1^k + 2k + 1) = -2 \cdot (-x_1^k)(-x_1^k + 1)\cdots(-x_1^k + 2k)$$

para $k \in \mathbb{N}$, además en ésta última expresión: $(-x_1^k)(-x_1^k+1)(-x_1^k+2)\cdots(-x_1^k + 2k)$ contiene $(2k+1)-$términos y cada uno de ellos es negativo, por lo que el valor $\Gamma(-x_1^k + 2k + 1)$ será positivo.

Veamos ahora que el término $(-x_1^k + 2k)$, con $-1 < -x_1^k + 2k < 0$ no se acerca a 0. De hecho $-1 < -x_1^k + 2k < -0,9$. Hacemos esta demostración por inducción.

- $k = 1$. En este caso $-x_1^1 \approx -2,9047877691$, por tanto

$$-x_1^1 + 2 \approx -0,9047877691 < -0,9.$$

- Suponemos ahora que $-1 < -x_1^k + 2k < -0,9$, y probemos que se cumple para $k+1$. Para ello probemos antes que se cumple que $-x_1^{k+1}+2 < -x_1^k$. Para probar esto último, basta con probar que $\Gamma(-x_1^{k+1}+2) < \Gamma(-x_1^k) = -2$ ya que ambos valores están en el mismo intervalo $-2k-1 < -x_1^k, -x_1^{k+1}+2. < -2k$. Por inducción:
  - Para $k = 1$. En efecto $\Gamma(-x_1^2+2) = \Gamma(-x_1^2)(-x_1^2+1)(-x_1^2) = -2\cdot(x_1^2)(x_1^2-1)$ y como $4 < x_1^2 < 5$, entonces $x_1^2 > 1$ y $x_1^2 - 1 > 1$, por lo tanto,
  $$\Gamma(-x_1^2+2) < \Gamma(-x_1^2) = -2.$$
  - Suponemos ahora que vale para k y probemos que se cumple para $k+1$. Usando la fórmula de recurrencia de la función Gamma, tenemos que $\Gamma(-x_1^{k+2}+2) = \Gamma(-x_1^{k+2})(-x_1^{k+2}+1)(-x_1^{k+2}) = -2\cdot(x_1^{k+2}-1)(x_1^{k+2})$ y como $x_1^{k+2} > 1$ y $x_1^{k+2}-1 > 1$, tenemos que $\Gamma(-x_1^{k+2}+2) < \Gamma(-x_1^{k+1}) = -2$, por lo tanto se cumple para $k+1$. Por lo tanto $\Gamma(-x_1^{k+2}+2) < \Gamma(-x_1^{k+1}) = -2$, entonces $-x_1^{k+2}+2 < -x_1^{k+1}$.

  Ahora: $-x_1^{k+1}+2(k+1) = (-x_1^{k+1}+2)+2k < -x_1^k+2k$ y como se cumple para k, tenemos que $-x_1^{k+1}+2(k+1) < -0,9$. También, como $-2k-3 < -x_1^{k+1}$, entonces $-1 < -x_1^{k+1}+2k+2$, por tanto $-1 < -x_1^{k+1}+2(k+1) < -0,9$ y se cumple para $k+1$.

Entonces tenemos que:

$$\Gamma(-x_1^k+2k+1) = -2\cdot(-x_1^k)(-x_1^k+1)(-x_1^k+2)\cdots(-x_1^k+2k),$$

por lo que tomando límites, tenemos que:

$$\lim_{k\to\infty}\Gamma(-x_1^k+2k+1) = \infty.$$

Ahora, como $-2k-1 < -x_1^k < -2k$, entonces $0 < -x_1^k+2k+1 < 1$ y $\Gamma(-x_1^k+2k+1) \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, por lo que necesariamente tenemos que: $(-x_1^k+2k+1) \xrightarrow{k\to\infty} 0$, dadas las propiedades de la función Gamma.

Puesto que $-2k-1 < -x_1^{k+1}+2 < -x_1^k$, entonces $0 < -x_1^{k+1}+2(k+1)+1 < -x_1^k+2k+1$. Esto es, si $\epsilon_j = -x_1^j+2j+1$, entonces $0 < \epsilon_{k+1} < \epsilon_k$, $\forall k \geqslant 1$.

Estudiemos ahora la diferencia: $\Psi(-x_1^k) - \Psi(-x_1^{k+1})$.

Para ello usaremos la representación en serie de la función digamma, a saber:

$$\Psi(x) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x+n-1}.$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}\Psi(-x_1^k) - \Psi(-x_1^{k+1}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_1^k - n + 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_1^{k+1} - n + 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x_1^k - n} - \frac{1}{x_1^{k+1} - n} \right).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Ahora analicemos la serie (2.9) por partes.

Sabemos que $2k < x_1^k < 2k+1$ y que $2k+2 < x_1^{k+1} < 2k+3$, es decir, que para n, desde $n = 0$ y hasta $n = 2k$, las diferencias $x_1^k - n$ y $x_1^{k+1} - n$, son positivas. Además tenemos que $x_1^k < x_1^{k+1}$, entonces $x_1^k - n < x_1^{k+1} - n$, lo que significa que:

$$\frac{1}{x_1^{k+1} - n} < \frac{1}{x_1^k - n} \quad \text{para} \;\; n = 0, 1, 2, \dots, 2k.$$

Para n, desde $n = 2k + 4$ hasta $n = \infty$, las diferencias $x_1^k - n$ y $x_1^{k+1} - n$ son negativas, es decir, que $n - x_1^k$ y $n - x_1^{k+1}$ son positivas y como $-x_1^k > -x_1^{k+1}$ tenemos $n - x_1^k > n - x_1^{k+1}$ y entonces $\dfrac{1}{n - x_1^k} < \dfrac{1}{n - x_1^{k+1}}$ lo que significa que

$$\frac{1}{x_1^{k+1} - n} < \frac{1}{x_1^k - n} \quad \text{para} \;\; n = 2k+4, 2k+5, \dots, \infty.$$

Para $n = 2k+1, 2k+2$ y $2k+3$, la diferencia $x_1^k - n$ es negativa; y la diferencia $x_1^{k+1} - n$ es positiva para $n = 2k+1$ y $n = 2k+2$, y es negativa para $n = 2k+3$.

Ahora, agrupando todos estos casos, tenemos que la serie (2.9) se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x_1^k - n} - \frac{1}{x_1^{k+1} - n} \right) &= \frac{1}{x_1^k - 2k - 1} - \frac{1}{x_1^{k+1} - 2k - 1} + \\ &+ \frac{1}{x_1^k - 2k - 2} - \frac{1}{x_1^{k+1} - 2k - 2} + \frac{1}{x_1^k - 2k - 3} - \frac{1}{x_1^{k+1} - 2k - 3} + \\ &+ \sum_{n=0}^{2k} \left(\frac{1}{x_1^k - n} - \frac{1}{x_1^{k+1} - n} \right) + \sum_{n=2k+4}^{\infty} \left(\frac{1}{x_1^k - n} - \frac{1}{x_1^{k+1} - n} \right).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Tenemos entonces que la suma de $n = 0$ hasta $n = 2k$ es positiva y que la serie desde $n = 2k+4$ hasta $n = \infty$ también es positiva; luego solo tenemos que ver los términos

desde $n = 2k+1$ hasta $n = 2k+3$. Es decir, tenemos que estimar el valor de:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x_1^k - 2k - 1} - \frac{1}{x_1^{k+1} - 2k - 1} + \frac{1}{x_1^k - 2k - 2} - \\ &- \frac{1}{x_1^{k+1} - 2k - 2} + \frac{1}{x_1^k - 2k - 3} - \frac{1}{x_1^{k+1} - 2k - 3}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Si el valor en (2.11) es positivo, concluimos que la diferencia $\Psi(-x_1^k) - \Psi(-x_1^{k+1})$, es positiva.

Sumando los términos en (2.11), tenemos el siguiente denominador:

$$\begin{aligned} &\underbrace{(x_1^k - 2k - 1)}_{<0} \times \underbrace{(x_1^{k+1} - 2k - 1)}_{>0} \times \underbrace{(x_1^k - 2k - 2)}_{<0} \times \\ &\times \underbrace{(x_1^{k+1} - 2k - 2)}_{>0} \times \underbrace{(x_1^k - 2k - 3)}_{<0} \times \underbrace{(x_1^{k+1} - 2k - 3)}_{<0}. \end{aligned}$$

Concluimos que el denominador es mayor que cero.

Ahora analizamos el numerador de (2.11), el cual es la suma de las siguiente expresiones:

$$\begin{aligned} &(x_1^{k+1} - 2k - 1) \times (x_1^k - 2k - 2) \times (x_1^{k+1} - 2k - 2) \times \\ &\times (x_1^k - 2k - 3) \times (x_1^{k+1} - 2k - 3) \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} &-(x_1^k - 2k - 1) \times (x_1^k - 2k - 2) \times (x_1^{k+1} - 2k - 2) \times \\ &\times (x_1^k - 2k - 3) \times (x_1^{k+1} - 2k - 3) \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} &(x_1^k - 2k - 1) \times (x_1^{k+1} - 2k - 1) \times (x_1^{k+1} - 2k - 2) \times \\ &\times (x_1^k - 2k - 3) \times (x_1^{k+1} - 2k - 3) \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} &-(x_1^k - 2k - 1) \times (x_1^{k+1} - 2k - 1) \times (x_1^k - 2k - 2) \times \\ &\times (x_1^k - 2k - 3) \times (x_1^{k+1} - 2k - 3) \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} &(x_1^k - 2k - 1) \times (x_1^{k+1} - 2k - 1) \times (x_1^k - 2k - 2) \times \\ &\times (x_1^{k+1} - 2k - 2) \times (x_1^{k+1} - 2k - 3) \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$-(x_1^k-2k-1)\times(x_1^{k+1}-2k-1)\times(x_1^k-2k-2)\times \\ \times(x_1^{k+1}-2k-2)\times(x_1^k-2k-3). \tag{2.17}$$

Esto es, el numerador de (2.11) es igual a la suma de las expresiones (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) y (2.17). Ahora, sabiendo que $-x_1^{k+1}+2<-x_1^k$, entonces $x_1^{k+1}-2k-3>x_1^k-2k-1$; luego notemos que las expresiones (2.13), (2.14), (2.15) y (2.16) son mayores que las expresiones:

$$-(x_1^k-2k-1)(x_1^k-2k-2)(x_1^k-2k)(x_1^k-2k-3)(x_1^k-2k-1) \tag{2.18}$$

$$(x_1^k-2k-1)(x_1^k-2k+1)(x_1^k-2k)(x_1^k-2k-3)(x_1^k-2k-1) \tag{2.19}$$

$$-(x_1^k-2k-1)(x_1^k-2k+1)(x_1^k-2k-2)(x_1^k-2k-3)(x_1^k-2k-1) \tag{2.20}$$

$$(x_1^k-2k-1)(x_1^k-2k+1)(x_1^k-2k-2)(x_1^k-2k)(x_1^k-2k-1), \tag{2.21}$$

respectivamente. Notamos, además, que al factorizar la suma de las expresiones (2.18), (2.19), (2.20) y (2.21) es igual a:

$$6(x_1^k-2k-1)^2(x_1^k-2k-1-\sqrt{2})(x_1^k-2k-1+\sqrt{2})$$

de esta forma, tenemos que la suma de las expresiones (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) y (2.17) es mayor que:

$$(x_1^{k+1}-2k-1)\times(x_1^k-2k-2)\times(x_1^{k+1}-2k-2)\times \\ \times(x_1^k-2k-3)\times(x_1^{k+1}-x_1^k-2)+6(x_1^k-2k-1)^2\times \\ \times(x_1^k-2k-1-\sqrt{2})\times(x_1^k-2k-1+\sqrt{2}). \tag{2.22}$$

Para seguir usaremos ahora las igualdades: $\epsilon_k=-x_1^k+2k+1$; $\epsilon_{k+1}=-x_1^{k+1}+2(k+1)+1$ y $x_1^{k+1}-x_1^k-2=\epsilon_k-\epsilon_{k+1}$. Así, reemplazando estos valores en la expresión (2.22) tenemos:

$$(2-\epsilon_{k+1})(-\epsilon_k-1)(1-\epsilon_{k+1})(-\epsilon_k-2)(\epsilon_k-\epsilon_{k+1})+ \\ +6\epsilon_k^2(-\epsilon_k-\sqrt{2})(-\epsilon_k+\sqrt{2})=4(\epsilon_k-\epsilon_{k+1})+ \\ +2(-4\epsilon_k^2-5\epsilon_k\epsilon_{k+1}+3\epsilon_{k+1}^2)-\epsilon_k^3-6\epsilon_k^2\epsilon_{k+1}+9\epsilon_k\epsilon_{k+1}^2- \\ -2\epsilon_{k+1}^3+6\epsilon_k^4-3\epsilon_k\epsilon_{k+1}^3+3\epsilon_k^2\epsilon_{k+1}^2-\epsilon_k^2-\epsilon_{k+1}^3+\epsilon_k^3\epsilon_{k+1}^2 \\ =(\epsilon_k-\epsilon_{k+1})\times\Bigg(4-6(\epsilon_k+\epsilon_{k+1})-2\epsilon_k\frac{(\epsilon_k+\epsilon_{k+1})}{(\epsilon_k-\epsilon_{k+1})} \\ +o(\epsilon_k-\epsilon_{k+1})\Bigg)>>0.$$

Notar, en relación al tamaño de los ϵ_k, que: como $x_1^1 \approx 2,904787769$, $x_1^2 \approx 4,995803277$, $x_1^3 \approx 6,999900774$ y $x_1^4 \approx 8,999998622$, entonces : $\epsilon_1 \approx 0,095212231$, $\epsilon_2 \approx 0,004196723$, $\epsilon_3 \approx 0,000099226$ y $\epsilon_4 \approx 0,0000013$.

Entonces, hemos probado que (2.11) es mayor que cero, lo que implica que la expresión (2.10) es mayor que cero, por tanto,

$$\Psi(-x_1^k) - \Psi(-x_1^{k+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x_1^k - n} - \frac{1}{x_1^{k+1} - n} \right) > 0.$$

De aquí tenemos que: $\Psi(-x_1^k) > \Psi(-x_1^{k+1}), \forall k \geqslant 1$.
Aplicando sucesivamente esta desigualdad, obtenemos:

$$\Psi(-x_1^1) > \Psi(-x_1^2) > \cdots > \Psi(-x_1^k) > \Psi(-x_1^{k+1});$$

y puesto que $\Psi(-x_1^1) < -8$, sección 2.3.3, concluimos que:

$$\frac{\Gamma'(-x_1^{k+1})}{\Gamma(-x_1^{k+1})} < -8 \text{ y, luego}$$

$$\Gamma'(-x_1^{k+1}) > 16.$$

De (2.5), (2.6), *a*) y *b*), resulta que:

$$\min\{\min\{|\Gamma'(-x_1^k)| > 16, |\Gamma'(-y_2^k)| > 8\}, 1 \leqslant k \leqslant n\} \geqslant \lambda > 1;$$

para algún $\lambda > 1$.

□

Nota. Podemos considerar, para efectos de cálculo, $\lambda = 8$.

Corolario 2.4.6. *Para $n \geqslant 1$ sean $J_k = \left[-x_2^k, -x_1^k\right]$ y $I_k = \left[-y_2^k, -y_1^k\right]$. Se cumple $|\Gamma'(z)| \geqslant \lambda > 1$; para cada $z \in J_k \cup I_k$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Prueba. Primero notamos que si $z \in J_k$ entonces $|\Gamma'(z)| \geqslant |\Gamma'(-x_1^k)|$ y que si $w \in I_k$ entonces $|\Gamma'(w)| \geqslant |\Gamma'(-y_2^k)|$. El resultado sigue ahora del **Teorema 2.4.5** □

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\Lambda_n = \bigcap_{j=0}^{\infty} \Gamma^{-j} \left(\bigcup_{i=1}^{n} J_i \cup I_i \right)$. Esto es,

$$x \in \Lambda_n \iff \Gamma^j(x) \in \bigcup_{i=1}^{n} J_i \cup I_i, \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Denotemos $L_1 = I_1, L_2 = J_1, L_3 = I_2, L_4 = J_2, \ldots, L_{2s+1} = I_{s+1}, L_{2s+2} = J_{s+1}$ para cada $0 \leqslant s \leqslant n-1$. Tenemos $2n$ intervalos $\{L_1, L_2, \ldots, L_{2n}\}$ y además

$$\min\left\{|\Gamma'(z)|, z \in L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_{2n}\right\} \geqslant \lambda > 1.$$

Observação. $\Lambda_n = \bigcap_{j=0}^{\infty} \Gamma^{-j}\left(\bigcup_{i=1}^{2n} L_i\right)$

$$z \in \Lambda_n \iff \Gamma^i(z) \in \bigcup_{i=1}^{2n} L_i \quad \text{para cada} \quad i = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Asociado a cada $z \in \Lambda_n$ podemos definir la sucesión $\theta(z) \in \Sigma_{2n} = \{\theta : \mathbb{N}_0 \to \{1, 2, 3, \ldots, 2n$ por:

$$\theta(z)(i) = j \iff \Gamma^i(z) \in L_j.$$

Proposición 2.4.7. *$\theta : \Lambda_n \to \Sigma_{2n}$ satisface $\sigma \circ \theta(z) = \theta \circ \Gamma(z)$ para cada $z \in \Lambda_n$.*

Prueba. Sea $\theta(z) = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots)$, entonces

$$z \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \Gamma^{-i}(L_{\theta_i}) = L_{\theta_0} \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \Gamma^{-i}(L_{\theta_i}) = L_{\theta_0} \cap \Gamma^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} \Gamma^{-i}(L_{\theta_{i+1}})\right);$$

Así, tenemos que: $z \in L_{\theta_0}$ y $\Gamma(z) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \Gamma^{-i}(L_{\theta_{i+1}})$. La condición $\Gamma(z) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \Gamma^{-i}(L_{\theta_{i+1}})$ implica que $\theta(\Gamma(z)) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots)$, por lo tanto,

$$\sigma \circ \theta(z) = \theta \circ \Gamma(z)$$

como anunciamos. □

Proposición 2.4.8. *$\theta : \Lambda_n \to \Sigma_{2n}$ es una biyección.*

Prueba. Suponemos $z, w \in \Lambda_n$ satisfacen $\theta(z) = \theta(w)$. Esto quiere decir que $\theta(z)(i) = \theta(w)(i)$ para cada $i \in \mathbb{N}_0$.
Por tanto $\{\Gamma^i(z), \Gamma^i(w)\} \subset L_{\theta(z)(i)}$. En particular $|\Gamma^i(z) - \Gamma^i(w)| \leqslant \left|L_{\theta(z)(i)}\right|$ para cada $i \in \mathbb{N}_0$.
Como $|\Gamma^i(z) - \Gamma^i(w)| = |(\Gamma^i)'(x)||z - w|$ con $x \in [z, w]$, entonces

$$\begin{aligned} |\Gamma^i(z) - \Gamma^i(w)| &\geqslant \lambda_{\theta(z)(0)} \lambda_{\theta(z)(1)} \cdots \lambda_{\theta(z)(i-1)} |z - w| \\ &\geqslant (\min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\})^i\, |z - w| > \lambda^i |z - w|; \end{aligned}$$

por tanto si $i \to \infty$ y $z \neq w$ vale $|\Gamma^i(z) - \Gamma^i(w)| \to \infty$ cosa que no puede ser pues $|\Gamma^i(z) - \Gamma^i(w)| \leqslant 1$ si $\{\Gamma^i(z), \Gamma^i(w)\} \subset L_{\theta(z)(i)}$, por lo tanto, debe ser $z = w$ y la

aplicación es inyectiva.

Vamos a probar que $\theta : \Lambda_n \to \Sigma_n$ es sobreyectiva. Para ello sean

$$\rho_n = \min \left\{ |\Gamma'(z)|; z \in \bigcup_{i=1}^{2n} L_i \right\} \text{ y } \epsilon_n = \max \left\{ |\Gamma'(z)|; z \in \bigcup_{i=1}^{2n} L_i \right\};$$

se cumple $\epsilon_n \geqslant |\Gamma'(z)| \geqslant \rho_n \geqslant \lambda > 1 \ \forall z \in \bigcup_{i=1}^{2n} L_i$.
Sea $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots) \in \Sigma_{2n}$ y consideremos

$$\begin{aligned} A(\theta_0) &= L_{\theta_0}, \\ A(\theta_0, \theta_1) &= L_{\theta_0} \cap \Gamma^{-1}(L_{\theta_1}), \\ A(\theta_0, \theta_1, \theta_2) &= L_{\theta_0} \cap \Gamma^{-1}(L_{\theta_1}) \cap \Gamma^{-2}(L_{\theta_2}) \end{aligned}$$

y

$$A(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k) = \bigcap_{i=0}^{k} \Gamma^{-i}\left(L_{\theta_i}\right).$$

Es claro que $A(\theta_0) \supset A(\theta_0, \theta_1) \supset \dots \supset A(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)$.

Probemos que $|A(\theta_0, \theta_1)| \leqslant \rho_n^{-1}$. En efecto, si $A_{\theta_0} = [x(\theta_0), y(\theta_0)] = L_{\theta_0}$. Sea $A(\theta_0, \theta_1) = [x(\theta_0, \theta_1), y(\theta_0, \theta_1)] \subset [x(\theta_0), y(\theta_0)]$, entonces:

$$|\Gamma\ (x\ (\theta_0, \theta_1)) - \Gamma\ (y\ (\theta_0, \theta_1))| = \left|\Gamma'(z)\right| |x\ (\theta_0, \theta_1) - y\ (\theta_0, \theta_1)|$$

para algún $z \in [x(\theta_0, \theta_1), y(\theta_0, \theta_1)]$, luego:

$$\left|L_{\theta_1}\right| = \left|\Gamma'(z)\right| |A(\theta_0, \theta_1)| \geqslant \rho_n\, |A(\theta_0, \theta_1)|,$$

y por tanto, $\rho_n^{-1}|L_{\theta_1}| \geqslant |A(\theta_0, \theta_1)|$.
De aquí, concluimos que: $\rho_n^{-1} > \rho_n^{-1}|L_{\theta_1}| \geqslant |A(\theta_0, \theta_1)|$, como anunciamos.

Probemos ahora que $A(\theta_0, \theta_1, \theta_2) \subset A(\theta_0, \theta_1) \subset A(\theta_0)$ satisface $\rho_n^{-2} > |A(\theta_0, \theta_1, \theta_2)|$.

Sea $A(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = [x(\theta_0, \theta_1, \theta_2), y(\theta_0, \theta_1, \theta_2)] \subset [x(\theta_0, \theta_1), y(\theta_0, \theta_1)]$, entonces

$$\begin{aligned} \left|\Gamma^2(x(\theta_0, \theta_1, \theta_2)) - \Gamma^2(y(\theta_0, \theta_1, \theta_2))\right| &= \left|L_{\theta_2}\right| = \\ &= \left|(\Gamma^2)'(z)\right| |x(\theta_0, \theta_1, \theta_2) - y(\theta_0, \theta_1, \theta_2)| = \\ &= \left|\Gamma'(\Gamma(z)) \cdot \Gamma'(z)\right| |A(\theta_0, \theta_1, \theta_2)| \geqslant \rho_n^2\, |\ A(\ \theta_0, \theta_1, \theta_2)|, \end{aligned}$$

entonces

$$1 > \left|L_{\theta_2}\right| = \left|\Gamma^2(x(\theta_0,\theta_1,\theta_2)) - \Gamma^2(y(\theta_0,\theta_1,\theta_2))\right| \geqslant \rho_n^2\,|A(\theta_0,\theta_1,\theta_2)|,$$

por lo tanto,

$$\rho_n^{-2} \geqslant |A(\theta_0,\theta_1,\theta_2)|.$$

Sucesivamente para

$$A(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_k) \subset A(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_{k-1}) \subset \ldots \subset A(\theta_0,\theta_1) \subset A(\theta_0)$$

se cumple que $|A(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_k)| \leqslant \rho_n^{-k}$. Así tenemos una sucesión de intervalos encajados

$$A(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_k) \subset A(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_{k-1}) \subset \ldots \subset A(\theta_0)$$

tal que $|A(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_k)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Así $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} A(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_k) = \{\overline{x}(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\ldots)\}$ = un punto. Claro que $\overline{x} = x(\theta_0,\theta_1,\ldots)$ satisface

$$\overline{x} \in L_{\theta_0}, \Gamma(\overline{x}) \in L_{\theta_1}, \Gamma^2(\overline{x}) \in L_{\theta_2}, \ldots, \Gamma^k(\overline{x}) \in L_{\theta_k}$$

y, en consecuencia; $\theta(\overline{x}) = (\theta_0,\theta_1,\ldots)$.
Ahora resulta claro que:

$$\theta^{-1}(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\ldots) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \Gamma^{-i}(L_{\theta_i}).$$

Con lo que la aplicación resulta ser sobreyectiva. □

Usando θ podemos dotar a Σ_n de una topología

$$A \subset \Sigma_n \text{ es abierto } \iff \theta^{-1}(A) \subset \Lambda_n \text{ es un abierto.}$$

Considerando la topología inducida en Σ_n tenemos que $\theta : \Lambda_n \to \Sigma_n$ es un homeomorfismo que conjuga $\Gamma|_{\Lambda_n} : \Lambda_n \to \Lambda_n$ en $\sigma : \Sigma_{2n} \to \Sigma_{2n}$ y, por tanto $h_{top}(\Gamma|_{\Lambda_n}) = \log(2n)$.

Corolario 2.4.9. $h_{top}(\Gamma) = \infty$.

Prueba. En efecto; es claro que $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq \Lambda_3 \subseteq \ldots \subseteq \Lambda_n \subseteq \Lambda_{n+1}\ldots$ y si $\Lambda_\infty = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \Gamma^{-i}\left(\bigcup\limits_{j=0}^{\infty}]-2j-1,-2j[\right)$, entonces cada $\Lambda_n \subseteq \Lambda_\infty$ y $\Gamma|_{\Lambda_n} : \Lambda_n \to \Lambda_n$ es parte de la dinámica de $\Gamma|_{\Lambda_\infty} : \Lambda_\infty \to \Lambda_\infty$. Por tanto,

$$h_{top}(\Gamma|_{\Lambda_\infty}) \geqslant h_{top}(\Gamma|_{\Lambda_n}) = \log(2n) \text{ para cada } n \geqslant 1,$$

es decir, $h_{top}(\Gamma|_{\Lambda_\infty}) = \infty$. □

Observação. Recordamos que un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}$, invariante para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice *hiperbólico* si ocurre que existe $\lambda > 1$ tal que $|(f^n)'(x)| \geqslant \lambda^n$ para cada $x \in \Lambda$. El corolario 2.4.9 tiene como consecuencia que el conjunto Λ_n, es hiperbólico para la función Γ.

Observação. Hasta aquí nuestro estudio de la función Gamma. Quedan diversas preguntas abiertas para continuar con esta línea de trabajo. Por ejemplo: Si consideramos

$$\Delta_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Gamma^{-k} \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} (]-2j-1, -2j[) \right);$$

entonces: ¿Será que la dinámica de Γ restricta a Δ_n contiene uno o más atractores?. Con seguridad, este es un problema no trivial e invitamos a los interesados a estudiarlo.

Notamos que todo nuestro estudio, sobre la dinámica, tiene que ver con la versión real de la función Gamma. Es claro que muchas preguntas se pueden hacer para la versión compleja pero claro...eso es otro mundo....a ver si por ahí hay alguien que se motiva y nos sorprende con resultados novedosos en ese ámbito....

3 Ejercicios

3.1 Representaciones

1. Verifique que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Solución. Usando el cambio de variables $\alpha u^2 = w$, tenemos la integral:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u^2} du = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} w^{-\frac{1}{2}} e^{-w} dw = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

□

2. Verifique que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

3. Sea $a, c \in \mathbb{R}^+$ y $b \in (1, +\infty)$, pruebe que:

$$\int_0^{+\infty} b^{-at^c} dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{c})}{c(a \ln(b))^{\frac{1}{c}}}.$$

Solución. Usando el cambio de variable $b^{-at^c} = e^{-w}$, entonces $dt = \dfrac{w^{\frac{1}{c}-1}dw}{c(a\ln(b))^{\frac{1}{c}}}$, tenemos que la integral:

$$\int_0^{+\infty} b^{-at^c}dt = \frac{1}{c(a\ln(b))^{\frac{1}{c}}}\int_0^{+\infty} w^{\frac{1}{c}-1}e^{-w} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)}{c(a\ln(b))^{\frac{1}{c}}}.$$

□

4. Sea $a \in (1,+\infty)$ y $b, c \in \mathbb{R}^+$, verifique que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{b+ct^a} = \frac{\pi}{ab^{1-\frac{1}{a}}c^{\frac{1}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)}.$$

5. Sea $a, c \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}-\{0\}$, tal que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, pruebe que:

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(au^2+buv+cv^2)}dudv = \frac{2\pi}{\sqrt{-\Delta}}.$$

6. Cuando $x \in (0,1)$, verifique el valor de las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^x)dt = \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)}{x}.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^x)dt = \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)}{x}.$

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{t^x}dt = \frac{\pi\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\Gamma(x)\cdot\sin(\pi x)}.$

7. Si $x \in (0,1)$, verifique que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}dt = -\pi^2\cot(\pi x)\cdot\csc(\pi x).$$

8. Si $x \in \mathbb{R}^-\backslash\mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{Z}_0^+$, verifique la representación integral de Cauchy-Saalschütz valida para $x \in (-n-1,-n)$.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(e^{-t} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!}\right)dt.$$

9. Se define el doble factorial de un número entero como:

$$n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdots 5\cdot 3\cdot 1 & \text{si } n \text{ es impar}\\ n\cdot(n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2 & \text{si } n \text{ es par}\\ 1 & \text{si } n=-1,0. \end{cases}$$

Pruebe que:

(a) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$

(b) $\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}.$

(c) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = (-1)^n\pi.$

Prueba. (a) Usando la proposición 1.2.8, tenemos que:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi},$$

Usando la definición de doble factorial tenemos:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

(b) Usamos la fórmula de recurrencia de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\left(-n+\frac{1}{2}\right)\times\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) =& \Gamma\left(-n+\frac{1}{2}+1\right)\\ =& \Gamma\left(-n+\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

Por lo que tenemos:

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-n+\frac{3}{2}\right)}{\left(-n+\frac{1}{2}\right)}$$

Usamos el hecho que

$$\Gamma\left(-n+\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-n+\frac{5}{2}\right)}{\left(-n+\frac{3}{2}\right)}$$

en la igualdad anterior y, obtenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) &=\frac{\Gamma\left(-n+\frac{3}{2}\right)}{\left(-n+\frac{1}{2}\right)}\\ &=\frac{\Gamma\left(-n+\frac{5}{2}\right)}{\left(-n+\frac{1}{2}\right)\times\left(-n+\frac{3}{2}\right)}\end{aligned}$$

Sucesivamente, tenemos que:

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-n+\frac{2n+1}{2}\right)}{\frac{(-2n+1)(-2n+3)\cdots(-\frac{1}{2})}{2^n}}=\frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}.$$

(c) Se obtiene multiplicando las expresiones del ítem a) con las del ítem b).

□

10. Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}-\{0\}$, pruebe que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(\alpha x)}{\Gamma(\beta x)}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Solución. Podemos escribir $\Gamma(\alpha x)=\dfrac{\Gamma(\alpha x+1)}{\alpha x}$, lo mismo que $\Gamma(\beta x)=\dfrac{\Gamma(\beta x+1)}{\beta x}$, entonces tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(\alpha x)}{\Gamma(\beta x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\beta x}{\alpha x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(\alpha x+1)}{\Gamma(\beta x+1)}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

□

11. Pruebe que:

$$-\int_0^1 x^k \ln(x)dx = \frac{1}{(k+1)^2}$$

para $k > -1$.

Solución. Usando la sustitución $x = e^t$, tenemos que la integral:

$$-\int_0^1 x^k \ln(x)dx = -\int_{-\infty}^0 e^{(k+1)t}t\,dt$$

ahora usando el cambio de variable $(k+1)t = -w$, tenemos que la integral anterior queda de la forma:

$$-\int_{-\infty}^0 e^{(k+1)t}t\,dt = \frac{1}{(k+1)^2}\int_0^{+\infty} we^{-w}dw = \frac{\Gamma(2)}{(k+1)^2} = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

□

12. Pruebe que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^4}dx = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$$

Solución. Usando el cambio de variable $t = x^4$, tenemos que la integral:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^4}dx = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} t^{-\frac{3}{4}}e^{-t}dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4} = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right).$$

□

13. Pruebe que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(ax)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{a}.$$

Solución. Del ejercicio 11, tomamos los valores $\alpha = a$ y $\beta = 1$, entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(\alpha x)}{\Gamma(\beta x)} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{a}.$$

□

14. Pruebe que:

$$\lim_{x\to -n}(x+n)\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Solución. Usando la fórmula de recurrencia de la función Gamma sucesivamente, tenemos que:

$$\lim_{x\to -n}(x+n)\Gamma(x) = \lim_{x\to -n}(x+n)\frac{\Gamma(x+n+1)}{x\cdots(x+n-1)(x+n)}$$
$$=\frac{\Gamma(1)}{(-1)^n n!},$$

por lo tanto:

$$\lim_{x\to -n}(x+n)\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

□

15. Pruebe que la ecuación $\Gamma(x+1) = k, k \neq 0$ tiene infinitas soluciones reales.

16. Para $a > 0$, pruebe las siguientes igualdades:

    (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2s+1}e^{-ax^2}dx = \frac{\Gamma(s+1)}{2a^{s+1}}.$

    (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2s}e^{-ax^2}dx = \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{2a^{s+\frac{1}{2}}}.$

Solución. Para ambos problemas usamos el cambio de variable $ax^2 = u$, entonces tenemos que:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2s+1}e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a^{s+1}}\int_0^{\infty} u^s e^{-u}du = \frac{\Gamma(s+1)}{2a^{s+1}}.$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2s}e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a^{s+\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty} u^{s-\frac{1}{2}}e^{-u}du = \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{2a^{s+\frac{1}{2}}}$. como señalado.

□

17. Expresa, en términos del factorial de un número, el $n-$ésimo coeficiente de la expansión de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ y $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$.

Solución. Al usar la expansión de Taylor para ambas funciones, tenemos:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots...$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \ldots...,$$

entonces tenemos que n-ésimo término de la expansión $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ es:

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!}{2^{2(n-1)}n!(n-2)!}, \quad \text{para} \quad n = 2, 3, \ldots$$

y que el n-ésimo término de la expansión $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ es:

$$a_n = (-1)^{n}\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

□

18. Considere la expresión de la función Gamma dada por el producto de Weiertrass:

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{(1+\frac{x}{n})}.$$

verifique que ésta representación cumple con las condiciones del teorema de Bohr-Mollerup.

Solución. Verificamos que ésta representación de la función Gamma cumple las condiciones del teorema de Bohr-Mollerup. A saber:

(a) $\Gamma(1) = 1$.
(b) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
(c) $\ln(\Gamma(x))$ es convexa.

En efecto, usando la expresión (1.11), tenemos que:

a)

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \lim_{n\to\infty} e^{-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n))}\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}}\frac{k}{k+1}\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

por lo tanto: $\Gamma(1) = 1$.

b) Usando el hecho que $e^{-\gamma} = \lim_{n\to\infty} n \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{1}{k}}$, tenemos:

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \frac{\frac{e^{-\gamma(x+1)}}{x+1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x+1}{n}}}{1+\frac{x+1}{n}}}{\frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}}$$

$$= \frac{xe^{-\gamma}}{x+1} \cdot \frac{\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}} \left(1+\frac{x}{n}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x+1}{n}\right)}$$

$$= \frac{xe^{-\gamma}}{x+1} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right) e^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{x+1}{n}\right)},$$

además como $e^{-\gamma} = \lim_{n\to\infty} n \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{1}{k}}$, entonces tenemos;

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \frac{x}{x+1} \cdot \lim_{n\to\infty} n \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{1}{k}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{x}{k}\right)}{\left(1+\frac{x+1}{k}\right)} \cdot e^{\frac{1}{k}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{x}{x+1} \left[\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+2} \cdots \frac{x+n-1}{x+n} \cdot \frac{x+n}{x+n+1}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{x}{x+n+1} = x.$$

Luego, $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = x$, por lo tanto,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

c) Aplicando logaritmo natural al producto de Weiertrass tenemos:

$$\ln(\Gamma(x)) = \ln\left(\frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{(1+\frac{x}{n})}\right)$$
$$= -\gamma x - \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

y dado el hecho que $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n))$, entonces tenemos

$$\ln(\Gamma(x)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k} + x\ln(n) - \ln(x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k} - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]$$

ahora derivando dos veces a $\ln(\Gamma(x))$ tenemos

$$\frac{d^2}{dx}[\ln\Gamma(x)] = \frac{1}{x^2} + \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2} > 0$$

y dado teorema 1.2.13 tenemos entonces que $\ln(\Gamma(x))$ es convexa.

□

3.2 Función Beta

1. Verifique las siguientes identidades:

   (a) $\beta(x, y) = \beta(x+1, y) + \beta(x, y+1)$.

   (b) $\beta(x, y)\cdot\beta(x+y, z) = \beta(y, z)\cdot B(x, y+z)$.

   (c) $\beta(x, y) = \dfrac{x+y}{y}\beta(x, y+1)$.

   (d) $\beta(x, y) = \dfrac{y-1}{x}\beta(x+1, y-1)$.

   (e) Para $y \notin \mathbb{Z}$ se cumple $\beta(x, y)\cdot\beta(x+y, 1-y) = \dfrac{\pi\csc(\pi y)}{x}$.

Solución. Aquí usamos la relación de la función Beta con la función Gamma, es decir:

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

a) tenemos que:

$$\beta(x,y)=\frac{(x+y)\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)}=\frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)}\cdot\frac{y\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)},$$

entonces tenemos que:

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)}+\frac{\Gamma(x)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)}=\beta(x+1,y)+\beta(x,y+1).$$

b) Tenemos que:

$$\beta(x,y)\cdot\beta(x+y,z)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\cdot\frac{\Gamma(x+y)\Gamma(z)}{\Gamma(x+y+z)}=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(x+y+z)},$$

entonces multiplicando este resultado por $\frac{\Gamma(y+z)}{\Gamma(y+z)}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\beta(x,y)\cdot\beta(x+y,z)=&\frac{\Gamma(y+z)\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)\Gamma(x+y+z)}\\=&\frac{\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)}\cdot\frac{\Gamma(x)\Gamma(y+z)}{\Gamma(x+y+z)}\\=&\beta(y,z)\cdot\beta(x,y+z).\end{aligned}$$

c) Tenemos que:

$$\begin{aligned}\beta(x,y+1)=&\frac{\Gamma(x)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)}\\=&\frac{y\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)}\\=&\frac{y}{x+y}\beta(x,y),\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\beta(x,y)=\frac{x+y}{y}\beta(x,y+1).$$

d) Tenemos que:

$$\beta(x+1,y-1)=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y-1)}{\Gamma(x+y)}=\frac{x\Gamma(x)\cdot\frac{\Gamma(y)}{y-1}}{\Gamma(x+y)}=\frac{x}{y-1}\beta(x,y),$$

por lo tanto,

$$\beta(x,y)=\frac{y-1}{x}\beta(x+1,y-1).$$

e) Tenemos que:

$$\beta(x,y)\cdot\beta(x+y,1-y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\cdot\frac{\Gamma(x+y)\Gamma(1-y)}{\Gamma(x+1)}$$
$$= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(1-y)}{x\Gamma(x)}$$

y usando la fórmula de reflexión de la función Gamma

$$\Gamma(y)\Gamma(1-y) = \pi \csc(\pi y)$$

para $y \notin \mathbb{Z}$, entonces

$$\beta(x,y)\cdot\beta(x+y,1-y) = \frac{\pi \csc(\pi y)}{x}.$$

□

2. Pruebe que la función beta está dada por el producto infinito:

$$\beta(x,y) = \frac{x+y}{xy}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+\frac{x+y}{k}}{\left(1+\frac{x}{k}\right)\left(1+\frac{y}{k}\right)}.$$

Solución. Usando el producto de Weierstrass, tenemos que:

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{\frac{e^{-\gamma(x+y)}}{xy}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x+y}{k}}}{(1+\frac{x}{k})(1+\frac{y}{k})}}{\frac{e^{-\gamma(x+y)}}{x+y}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x+y}{k}}}{(1+\frac{x+y}{k})}}$$

cancelando, obtenemos que:

$$\beta(x,y) = \frac{x+y}{xy}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+\frac{x+y}{k}}{\left(1+\frac{x}{k}\right)\left(1+\frac{y}{k}\right)}.$$

□

3. Verifique la siguiente identidad para $n,k \in \mathbb{Z}^+$ y $k \leqslant n$.

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)B(n-k+1,k+1)}.$$

Solución. Usando la proposición 1.2.28 tenemos que:

$$B(n-k+1,k+1)=\frac{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-k+1+k+1)}=\frac{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(n+2)}$$

y dado que $n,k\in\mathbb{Z}^+$, tenemos:

$$B(n-k+1,k+1)=\frac{(n-k)!k!}{(n+1)!}=\frac{(n-k)!k!}{(n+1)n!},$$

por lo tanto:

$$\binom{n}{k}=\frac{1}{(n+1)B(n-k+1,k+1)}.$$

□

4. Si $-1<\alpha<\beta$ pruebe que:

$$\int_0^{+\infty}\frac{(\sinh(x))^\alpha}{(\cosh(x))^\beta}dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}.$$

Solución. Usando el cambio de variable $u=\sinh^2(x)$ y la igualdad $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{(\sinh(x))^\alpha}{(\cosh(x))^\beta}dx&=\int_0^\infty\frac{u^{\frac{\alpha}{2}}}{(1+u)^{\frac{\beta}{2}}}\cdot\frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}(1+u)^{\frac{1}{2}}}\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{u^{\frac{\alpha-1}{2}}du}{(1+u)^{\frac{\beta+1}{2}}}.\end{aligned}$$

Ahora usando la proposición 1.2.26 y la propiedad simétrica de la función beta, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{(\sinh(x))^\alpha}{(\cosh(x))^\beta}dx&=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}.\end{aligned}$$

□

5. Si $\theta \in (-\pi, \pi)$, pruebe que:

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+2xy\cos(\theta))}dxdy = \frac{\theta}{2\sin(\theta)}.$$

6. Si $f(x) = \tan(x)$ o $f(x) = \cot(x)$ y $\alpha \in (0,1)$ verifique que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^\alpha dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(f(x))^\alpha} = \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^\alpha}{x^2}dx = \pi\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

7. Se llaman integrales de Wallis a los términos de la sucesión de integrales:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx.$$

Usando estas integrales, pruebe que:

(a) Se cumple la igualdad, es decir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx.$$

(b) $W_{2n} = \frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\cdot\pi.$

(c) $W_{2n+1} = \frac{1}{2}B\left(n+1,\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\cdot\pi.$

(d) $W_{n+2} = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+3}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{n+1}{n+2}W_n.$

(e) $W_{\frac{1}{2}} = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2}.$

(f) $W_{-\frac{1}{2}} = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)}{2\sqrt{2\pi}}.$

8. Pruebe las siguientes igualdades:

(a) $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}x^{2n} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}; & n=0 \\ \pi\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}; & n=1,2,3,\dots \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}x^{2n} = \begin{cases}\pi; & n=0\\ \pi\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}; & n=1,2,3,\dots\end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n} = \begin{cases}2^{2n+1}\cdot\dfrac{n!\cdot n!}{(2n+1)!}; & n\geqslant -1\\ 2\cdot\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}; & n=0,1,2,\dots\end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1}x^{2m+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$

(e) $x^{2n}(1-x^2)^m\,dx = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left(n-\frac{1}{2}\right)!m!}{\left(n+m+\frac{1}{2}\right)!}.$

9. Evalué la siguiente integral en términos de la función beta:

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^a(1-x)^b\,dx.$$

Solución. Usando el cambio de variables: $x=\cos(\theta)$, tenemos que:

$$2^{a+b+1}\int_{0}^{\pi}\cos^{2a+1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin^{2b+1}\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

y haciendo el cambio $u=\frac{\theta}{2}$ obtenemos que:

$$2^{a+b+1}\cdot 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2a+1}(u)\sin^{2b+1}(u)du$$

y usando la proposición 1.2.25, tenemos:

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^a(1-x)^b\,dx = 2^{a+b+1}\beta(a+1,b+1).$$

□

10. Pruebe, por medio de la función beta, que:

$$\int_{t}^{z}\frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

para $0<\alpha<1$.

Solución. Aquí usamos el siguiente cambio de variables: $u = \frac{x-t}{z-t}$, con $x - t = u(z-t)$ y $z - x = (z-t)(1-u)$. Observe que ahora los límites de integración son de 0 hasta 1, por lo que:

$$\int_t^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}(x-t)^\alpha} = \int_0^1 \frac{du}{u^\alpha(1-u)^{1-\alpha}} = \beta(-\alpha+1,\alpha),$$

por lo tanto:

$$\int_t^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}(x-t)^\alpha} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

□

11. Pruebe la integral de Dirichlet:

$$\int\int x^p y^q dxdy = \frac{B(p+1,q+1)}{p+q+2}$$

donde el límite de integración es el triángulo formado por los ejes positivos x e y y la recta $x + y = 1$.

Solución. Escribiendo la integral usando los límites de integración, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^p dx \int_0^{1-x} y^q dy =& \frac{1}{q+1}\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}dx\\ =& \frac{\beta(p+1,q+2)}{q+1}\end{aligned}$$

y como $\beta(p+1,q+2) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+2)}{\Gamma(p+q+3)} = \frac{\Gamma(p+1)(q+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+3)}$, entonces:

$$\frac{\beta(p+1,q+2)}{q+1} = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{(p+q+2)\Gamma(p+q+2)} = \frac{\beta(p+1,q+1)}{p+q+2}.$$

□

12. Defina la representación integral de las funciones de Bessel por:

$$J_\nu(z) = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}(\nu-\frac{1}{2})!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\nu}(\theta)\cos(z\cos(\theta))d\theta$$

para $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$.
Pruebe que :

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu};$$

que corresponde a una representación en serie de las funciones de Bessel.

3.3 Constante de Euler-Mascheroni

1. Encuentre la recta tangente en $x = 1$ para la función Gamma.

Solución. Sabemos que dada una función diferenciable, $f(x)$, la recta tangente a su gráfico en el punto (x_0, y_0) está dada por $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$. En nuestro caso, tenemos que: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ y $\Gamma'(1) = -\gamma$. Por lo tanto, la recta tangente es:

$$y = -\gamma \cdot x + \gamma + 1.$$

□

2. Verifique las siguientes igualdades:

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-r} \ln(r)dr = -\gamma.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} re^{-r} \ln(r)dr = 1 - \gamma.$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} r^n e^{-r} \ln(r)dr = (n-1)! + n\int_0^{\infty} r^{n-1}e^{-r} \ln(r)dr.$

Solución. Usando la función Gamma: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ y derivándola con respecto a x, tenemos que:

$$\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t} \ln(t)dt.$$

Evaluando esta expresión en $x = 1$, tenemos:

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-r} \ln(r)dt = -\gamma.$$

Sea $I_n = \int_0^\infty r^n e^{-r} \ln(r) dr$, integrando por partes tenemos que:

$$\begin{aligned} I_n =& - r^n \ln(r) e^{-r}|_0^\infty + \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r} (n \ln(r) + 1) dr \\ =& 0 + n I_{n-1} + \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r} dr = n I_{n-1} + (n-1)!; \end{aligned}$$

que es la parte c), del ejercicio.

Para la parte a) tenemos que $I_0 = -\gamma$, entonces para la parte b), obtenemos:

$$I_1 = 0! + 1 I_0 = 1 - \gamma.$$

Observar que $I_1 = \Gamma'(2)$. □

3. Verifique las siguientes representaciones de γ:

   (a) $\gamma = -\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt = -\int_1^\infty \frac{\ln(\ln(t))}{t^2} dt.$

   (b) $\gamma = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-1}{(1-xy)\ln(xy)} dx dy.$

   (c) $\gamma = \sum_{n=2}^\infty (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n}$. Donde $\zeta(n)$ es la función zeta de Riemann, definida como:

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^n}.$$

4. Pruebe los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \Gamma(x) \right) = \gamma.$

   (b) $\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x} - \Gamma(-x) \right) = \gamma.$

Solución. a) Tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \Gamma(x) \right) &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - x\Gamma(x)}{x} \right) \\ &= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{\Gamma(1+x) - \Gamma(1)}{x} \right) \end{aligned}$$

y esta es la definición de la derivada en el punto $x = 1$ y como $\Gamma'(1) = -\gamma$, por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \Gamma(x)\right) = -\Gamma'(1) = \gamma.$$

b) Similar a la parte a).

□

3.4 Función Digamma y Polygamma

1. Pruebe que:

$$\Psi(x+n) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+n-1} + \Psi(x); \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Solución. Usando la fórmula de recurrencia de la función digamma: tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Psi(x+1) &= \Psi(x) + \frac{1}{x} \\
\Psi(x+2) &= \Psi(x+1) + \frac{1}{x+1} \\
&= \Psi(x) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \\
\vdots &= \vdots \\
\Psi(x+n) &= \Psi(x+n-1) + \frac{1}{x+n-1} \\
&= \Psi(x+n-2) + \frac{1}{x+n-1} + \frac{1}{x+n-2} \\
&= \vdots \\
&= \Psi(x) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+n-1}.
\end{aligned}$$

□

2. Pruebe que para $p, q \in \mathbb{Z}$ y $0 < p < q$ se cumple:

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \ln(2q) - \frac{1}{2}\pi \cot\left(\frac{p}{q}\pi\right) \to$$
$$\to + 2\sum_{k=1}^{[\frac{q}{2}]-1} \cos\left(\frac{2\pi pk}{q}\right) \ln\left[\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)\right].$$

Solución. Ver Andrews, Askey y Roy (1999), página 13. □

3. Calcule los siguientes valores:

   (a) $\Gamma'(2)$.
   (b) $\Gamma'(3)$.
   (c) $\Gamma'(4)$.

Solución. Usando el ejercicio 2 de la sección 3.3 (ejercicios relacionados con la constante de Euler- Mascheroni), tenemos que: $I_n = nI_{n-1} + (n-1)!$ con $I_0 = \Gamma'(1), I_1 = \Gamma'(2), \ldots$, por lo tanto,

a) $\Gamma'(2) = I_1 = 1I_0 + 0! = -\gamma + 1$.
b) $\Gamma'(3) = I_2 = 2I_1 + 1! = -2\gamma + 3$.
c) $\Gamma'(4) = I_3 = 3I_2 + 2! = -6\gamma + 11$.

□

4. Usando la fórmula de multiplicación de Gauss pruebe que:

$$n \cdot \Psi(nx) = n\ln(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \Psi\left(x + \frac{k}{n}\right).$$

Solución. Aplicando logaritmo natural a la fórmula de multiplicación de Gauss, dada en el teorema 1.2.33, tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln \Gamma\left(x + \frac{k}{n}\right) = \frac{n-1}{2}\ln(2\pi) + \left(\frac{1}{2} - nx\right)\ln(n) + \ln \Gamma(nx),$$

luego derivando con respecto a x, obtenemos que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(x + \frac{k}{n}\right)}{\Gamma'\left(x + \frac{k}{n}\right)} = -n\ln(n) + n \cdot \frac{\Gamma'(nx)}{\Gamma(nx)},$$

por lo tanto,

$$n \cdot \Psi(nx) = n \ln(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \Psi\left(x + \frac{k}{n}\right).$$

□

5. Pruebe que:

$$\Gamma'\left(m + \frac{1}{2}\right) = \left(-\gamma - 2\ln(2) + 2\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1}\right) \frac{(2m)!\sqrt{\pi}}{2^{2m} m!}.$$

para $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Solución. Consideramos la expresión en serie para $\Psi(x)$ dada en la sección 1.2.7. Evaluando $\Psi\left(\frac{1}{2}\right)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\frac{1}{2}\right) &= -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2} - 1}\right) \\
&= -\gamma + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1}\right) \\
&= -\gamma - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= -\gamma - 2\ln(2).
\end{aligned}$$

Como $\Gamma'(\frac{1}{2}) = \Psi(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})$ tenemos

$$\Gamma'(\frac{1}{2}) = (-\gamma - 2\ln(2))\sqrt{\pi}.$$

Con lo que verificamos lo solicitado para $m = 0$.
Ahora, para $m \geqslant 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\Psi\left(m + \frac{1}{2}\right) &= -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + m + \frac{1}{2} - 1}\right) \\
&= -\gamma + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+2m-1} (*)
\end{aligned}$$

Ya que:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$$

tenemos que:

$$-\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1},$$

y, reemplazando en la igualdad $(*)$, tenemos:

$$\begin{aligned}\Psi\left(m+\frac{1}{2}\right)&=-\gamma+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}+2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\\&=-\gamma-2\ln(2)+2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\end{aligned}$$

como $\Psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ tenemos, usando la proposición 1.2.8, que:

$$\begin{aligned}\Gamma'\left(m+\frac{1}{2}\right)&=\left(-\gamma-2\ln(2)+2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\\&=\left(-\gamma-2\ln(2)+2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\right)\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\right)\\&=\left(-\gamma-2\ln(2)+2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\right)\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-1)\cdot 2n}{2\cdot 4\cdots 2n}\sqrt{\pi}\right)\\&=\left(-\gamma-2\ln(2)+2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\right)\frac{(2n)!}{2^n(n)!}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

□

6. Usando la representación en serie de la función digamma, pruebe que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+2m+1)}=\frac{2}{2m+1}\left(-\ln(2)+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2k+1}\right).$$

para $m\in\mathbb{Z}^+$.

7. Verifique la siguiente igualdad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \frac{1}{16}\left(\Psi'\left(\frac{1}{4}\right) - \Psi'\left(\frac{3}{4}\right)\right).$$

La aproximación de la suma de esta serie se conoce como la constante de Catalan λ_c.

Solución. Para este ejercicio usaremos el caso $n = 1$ de la proposición 1.2.40. Tenemos la siguiente expresión:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{(4n-3)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{(4n-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{4}+n-1\right)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}+n-1\right)^2}\right) =$$

$$\frac{1}{16}\left(\Psi'\left(\frac{1}{4}\right) - \Psi'\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

□

8. Verifique la representación integral de la constante de Catalan:

$$\lambda_c = \int_0^1 \frac{\tan^{-1}(t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t^2} dt$$

9. Verifique la representación integral de la función polygamma:

$$\Psi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^{\infty} \frac{t^n e^{-xt}}{1-e^{-t}} dt.$$

Solución. Usando el teorema 1.2.38, tenemos que:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} dt,\end{aligned}$$

entonces derivando con respecto a x, obtenemos:

$$\Psi'(x) = \int_0^{\infty} \frac{te^{-xt}}{1-e^{-t}} dt$$

y si derivamos nuevamente respecto a x, está última integral, nos da que:

$$\Psi''(x) = -\int_0^{\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1-e^{-t}} dt.$$

Inductivamente:

$$\Psi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^{\infty} \frac{t^n e^{-xt}}{1-e^{-t}} dt.$$

□

10. Verifique las siguientes igualdades para todo $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$ y con $x \neq y$.

 (a) $\Psi(x+1) - \Psi(y+1) = (x-y)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$

 (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\Psi(x+1)-\Psi(y+1)}{x-y} = \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2).$

Aquí $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$, denota la función zeta de Riemann, definida para valores complejos $s \in \mathbb{C}$ con $re(s) > 1$.

Solución. a) Usando la representación en serie de la función digamma, tenemos que:

$$\Psi(x+1) - \Psi(y+1) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) + \gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x-n-y}{(n+x)(n+y)}\\
&= (x-y)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.
\end{aligned}$$

b) Usando la parte a), tenemos que:

$$\frac{\Psi(x+1)-\Psi(y+1)}{x-y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)},$$

entonces cuando $(x, y) \to (0,0)$, nos da que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\Psi(x+1)-\Psi(y+1)}{x-y} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)(n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \zeta(2) \\ &= \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

Nota Para la igualdad $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ver Belanzario (2001).

□

11. Pruebe que:

$$\Gamma'(x-n) = \frac{\Gamma'(x) + \Gamma(x)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-x}}{\prod_{k=1}^{n}(x-k)}.$$

Solución. Usando la fórmula de recurrencia de la función Gamma, tenemos que $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$, luego derivando con respecto a x nos da:

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x-1) + (x-1)\Gamma'(x-1).$$

De esta forma vemos que la expresión señalada vale para $n = 1$. Ahora de $\Gamma(x-1) = \Gamma(x-2+1) = (x-2)\Gamma(x-2)$, tenemos: $\Gamma'(x-1) = \Gamma(x-2) + (x-2)\Gamma'(x-2)$ y entonces

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x-1) + (x-1)\big(\Gamma(x-2) + (x-2)\Gamma'(x-2)\big) =$$

$$= \Gamma(x-1) + (x-1)\Gamma(x-2) + (x-1)(x-2)\Gamma'(x-2) =$$

$$= \frac{\Gamma(x)}{(x-1)} + \frac{\Gamma(x)}{(x-2)} + (x-1)(x-2)\Gamma'(x-2)$$

. De aquí obtenemos:

$$\Gamma'(x-2) = \frac{\Gamma'(x) + \Gamma(x)\left(\frac{1}{(1-x)} + \frac{1}{(2-x)}\right)}{(x-1)(x-2)}$$

que es la expresión señalada para $n = 2$.
Sucesivamente, tenemos que:

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k} + \Gamma'(x-n)\prod_{k=1}^{n}(x-k),$$

por tanto:

$$\Gamma'(x-n) = \frac{\Gamma'(x) + \Gamma(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-x}}{\prod_{k=1}^{n}(x-k)}.$$

□

12. Pruebe que:

$$\Psi'(x) = \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - (\Psi(x))^2 .$$

Solución. Usando la definición de la función digamma: $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ y derivando con respecto a x, tenemos que:

$$\Psi'(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} = \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - (\Psi(x))^2.$$

□

13. Aplicando el ejercicio anterior verifique las siguientes igualdades:

   (a) $\Gamma''(1) = \dfrac{\pi^2}{6} + \gamma^2 = \zeta(2) + \gamma^2.$

   (b) $\Gamma'''(1) = -\gamma^3 - \dfrac{1}{2}\pi^2\gamma - 2\zeta(3).$

   (c) $\Gamma''''(1) = \gamma^4 + \pi^2\gamma^2 + 8\zeta(3)\gamma + \dfrac{3}{20}\pi^4.$

14. Demuestre que para $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq b$, se cumplen las siguientes igualdades:

   (a) $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \cot^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}{x}dx.$

(b) $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}{x}dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(bx)-\cos(ax)}{x}dx = \ln\left(\frac{a}{b}\right).$

15. Verifique las siguientes identidades simétricas:

(a) $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x}\beta(x,y) = \beta(x,y)\,(\Psi(x)-\Psi(x+y)).$

(b) $\displaystyle\frac{\partial}{\partial y}\beta(x,y) = \beta(x,y)\,(\Psi(y)-\Psi(x+y)).$

Solución. Para ambos ejercicios usamos la relación $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\beta(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\right)\\
&= \frac{\Gamma'(x)\Gamma(y)\Gamma(x+y)}{(\Gamma(x+y))^2} - \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma'(x+y)}{(\Gamma(x+y))^2}\\
&= \frac{\Gamma'(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)\Gamma(x+y)}\\
&= \frac{\Gamma'(x)\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x)\Gamma(x+y)} - \beta(x,y)\Psi(x+y)\\
&= \beta(x,y)\Psi(x) - \beta(x,y)\Psi(x+y)\\
&= \beta(x,y)(\Psi(x)-\Psi(x+y)).
\end{aligned}$$

b) Ídem ítem a), pero derivando con respecto a y.

□

3.5 Función Gamma incompleta

1. Pruebe que:

$$\gamma(a,x) = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)!}{(a+n)!}x^{a+n}.$$

Solución. Integrando por partes la integral definida para $\gamma(a,x)$, tenemos:

$$\gamma(a,x) = \int_0^x t^{a-1}e^{-t}dt = \frac{x^a e^{-x}}{a} + \frac{1}{a}\int_0^x t^a e^{-t}dt$$

e integrando por partes vamos a tener la serie:

$$\gamma(a,x) = \frac{x^a e^{-x}}{a} + \frac{x^{a+1} e^{-x}}{a(a+1)} + \ldots,$$

por lo tanto,

$$\gamma(a,x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)!}{(a+n)!} x^{a+n}.$$

□

2. Pruebe que:

   (a) $\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{-a}\gamma(a,x)\right] = (-1)^m x^{-a-m} \gamma(a+m,x).$

   (b) $\frac{d^m}{dx^m}\left[e^x \gamma(a,x)\right] = \frac{e^x \Gamma(a)}{\Gamma(a-m)} \gamma(a-m,x).$

3. Pruebe que $\gamma(a,x)$ y $\Gamma(a,x)$ satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia:

   (a) $\gamma(a+1,x) = a\gamma(a,x) - x^a e^{-x}.$

   (b) $\Gamma(a+1,x) = a\Gamma(a,x) + x^a e^{-x}.$

   Solución. (a) Podemos escribir:

$$\begin{aligned} x^a e^{-x} &= \int_0^x \frac{d(t^a e^{-t})}{dt} dt = \\ &= \int_0^x (a t^{a-1} e^{-t} - x^a e^{-t}) dt = \\ &= \int_0^x a t^{a-1} e^{-t} dt - \int_0^x x^a e^{-t} dt = \\ &= a\gamma(a,x) - \gamma(a+1,x), \end{aligned}$$

   por lo tanto,

$$\gamma(a+1,x) = a\gamma(a,x) - x^a e^{-x}.$$

   (b) Ídem ítem a), pero usando la definición de $\Gamma(a,x)$.

□

4. Se define como la integral exponencial a la siguiente expresión:

$$E_i(-x) = E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

De igual forma se definen la integral coseno, la integral seno y la integral logaritmo, como:

- $Si(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt.$
- $Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt.$
- $Li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}.$

respectivamente. Pruebe que:

(a) $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = -\gamma - \ln(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!}.$

(b) $Si(x) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$

(c) $Ci(x) = \gamma + \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)!}.$

5. Si relacionamos la integral exponencial con un cambio de variables podemos obtener que:

$$E_n(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt.$$

Pruebe que $E_n(x)$ satisface la siguiente relación de recurrencia

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n} e^{-x} - \frac{x}{n E_n(x)} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Además pruebe que $E_n(0) = \frac{1}{n-1}$, para $n > 1$.

6. Se definen las integrales de error a las siguientes expresiones:

- $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$
- $erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt.$

Pruebe que:

(a) $erfc(z) = 1 - erf(z).$

(b) $erf(z) = \pi^{-\frac{1}{2}} \gamma \left(\frac{1}{2}, z^2 \right).$

(c) $erfc(z) = \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right)$.

Solución. (a) Tenemos: $erf(z)+erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt$ $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt \right)$; usando la proposición 1.2.6, vemos que:

$$erfc(z) + erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$$

(b) Sabemos que $\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$, entonces con $a = \frac{1}{2}$ y $x = z^2$, nos da $\gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right) = \int_0^{z^2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$. Usando ahora el cambio de variable $t = u^2$, tenemos:

$$\int_0^{z^2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^z e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \cdot erf(z).$$

(c) Ídem ítem b).

□

3.6 Función Gamma en los números complejos

1. Para $z \in \mathbb{C}$ y $\mathcal{R}e(z) \neq 0, -1, -2, \ldots$ tenemos que:

$$\Gamma(\overline{z}) = \overline{\Gamma(z)}$$

$$\ln(\Gamma(\overline{z})) = \overline{\ln(\Gamma(z))}.$$

Solución. Usando el producto de Weierstrass como representación de la función Gamma, la proposición 1.2.20, y las propiedades de los conjugados de los números complejos, tenemos que:

$$\overline{\Gamma(z)} = \overline{\frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^\infty \frac{e^{\frac{z}{n}}}{(1 + \frac{z}{n})}} = \frac{e^{-\gamma \overline{z}}}{\overline{z}} \prod_{n=1}^\infty \frac{e^{\frac{\overline{z}}{n}}}{(1 + \frac{\overline{z}}{n})},$$

por lo tanto, $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\overline{z})$. De este resultado se deduce inmediatamente que: $\ln(\Gamma(\overline{z})) = \overline{\ln(\Gamma(z))}$.

□

2. Sea $x \in \mathbb{R}$, con $x \notin \mathbb{Z}$, tenemos que:

$$|(ix)!|^2 = \frac{\pi x}{\sinh(\pi x)}.$$

Solución. De la definición de la función Gamma para una variable compleja, podemos, al igual que en el caso real, probar que vale la fórmula de reflexión de Euler y, por ello, tenemos que:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Así, para $z = -ix$, con $x \neq 0$, tenemos:

$$\Gamma(-ix)\Gamma(1+ix) = \frac{\pi}{\sin(-i\pi x)}$$

y dado que $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, entonces

$$\Gamma(-ix)\Gamma(1+ix) = \frac{\pi}{\sin(-i\pi x)} = \frac{\pi}{\frac{e^{-i(i\pi x)}-e^{-i(-i\pi x)}}{2i}} = \frac{i\pi}{\frac{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}{2}}.$$

Dado que $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, obtenemos:

$$\Gamma(-ix)\Gamma(1+ix) = \frac{i\pi}{\sinh(\pi x)}. \tag{3.1}$$

Ahora de la fórmula de recurrencia de la función Gamma, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, y de la definición factorial de la función Gamma, $\Gamma(z+1) = z!$, deducimos que

$$(-ix)!(ix)! = \Gamma(-ix+1)\Gamma(ix+1) = -ix\Gamma(-ix)\Gamma(ix+1)$$

y usando la ecuación (3.1), tenemos:

$$(-ix)!(ix)! = -ix \cdot \frac{i\pi}{\sinh(\pi x)} = \frac{x\pi}{\sinh(\pi x)} \tag{3.2}$$

Ahora, usando el producto de Weierstrass para la función Gamma, proposición 1.2.20, tenemos que:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z}{n}}}{(1+\frac{z}{n})},$$

entonces si $z = u - iv$ con $u, v \in \mathbb{R}$ nos da:

$$|(u-iv)!| = |\Gamma(u-iv+1)| = \frac{|e^{-\gamma(u-iv+1)}|}{|u-iv+1|}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|e^{\frac{u-iv+1}{n}}|}{|(1+\frac{u-iv+1}{n})|} =$$

$$= \frac{e^{-\gamma(u+1)}}{\sqrt{(1+u)^2+v^2}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{\frac{u+1}{n}}}{\sqrt{(n+u+1)^2+v^2}}$$

y que:

$$|(u+iv)!| = |\Gamma(u+iv+1)| = \frac{|e^{-\gamma(u+iv+1)}|}{|u+iv+1|}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|e^{\frac{u+iv+1}{n}}|}{|(1+\frac{u+iv+1}{n})|} =$$

$$= \frac{e^{-\gamma(u+1)}}{\sqrt{(1+u)^2+v^2}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{\frac{u+1}{n}}}{\sqrt{(n+u+1)^2+v^2}}$$

con lo que $|(u-iv)!| = |(u+iv)!|$, por lo tanto, usando la ecuación (3.2), $u = 0$ y $v = -x$, tenemos que:

$$|(-ix)!(ix)!| = \left|\frac{x\pi}{\sinh(\pi x)}\right|, \text{ entonces } |(ix)!|^2 = \frac{x\pi}{\sinh(\pi x)},$$

como señalado.

□

3. Para n y b números enteros positivos, se cumple:

$$|(n+ib)!| = \left(\frac{\pi b}{\sinh(\pi b)}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{k=1}^{n}(k^2+b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Solución. De la fórmula de recurrencia y la definición factorial de la función Gamma tenemos que:

$$(n+ib)! = \Gamma(n+ib+1) = (n+ib)(n+ib-1)\Gamma(n+ib-1)$$

y dado que n es un entero positivo, podemos escribirla de la siguiente forma:

$$(n+ib)! = \Gamma(n+ib+1) = (n+ib)(n+ib-1)\cdots(1+ib)\Gamma(1+ib)$$

y como $\Gamma(1+ib)) = (ib)!$ tenemos que:

$$|\Gamma(n+ib+1)| = |(n+ib)||(n+ib-1)|\cdots|(1+ib)||(ib)!|.$$

Del ejercicio anterior sabemos que $|(ix)!| = \left(\dfrac{x\pi}{\sinh(\pi x)}\right)^{\frac{1}{2}}$, por lo tanto:

$$|(n+ib)!| = \sqrt{1^2+b^2}\cdots\sqrt{n^2+b^2}\cdot\left(\frac{b\pi}{\sinh(\pi b)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

con lo que:

$$|(n+ib)!| = \left(\frac{\pi b}{\sinh(\pi b)}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{k=1}^{n}(k^2+b^2)^{\frac{1}{2}},$$

como señalado. □

4. Se cumple

$$|\Gamma(\alpha+i\beta)| = |\Gamma(\alpha)|\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

para cada número complejo que no es un entero no positivo.

Solución. De la representación de la función Gamma como producto infinito, tenemos que:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}.$$

Ahora, para $z = \alpha + i\beta$, tenemos: $z + \overline{z} = 2\alpha$ y $z \cdot \overline{z} = \alpha^2 + \beta^2$, por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(\overline{z})} &= ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}\cdot\overline{z}e^{\gamma\overline{z}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\overline{z}}{n}\right)e^{\frac{-\overline{z}}{n}}\\ &= z\cdot\overline{z}e^{\gamma(z+\overline{z})}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{\overline{z}}{n}\right)e^{\frac{-(z+\overline{z})}{n}}\end{aligned}$$

$$= (\alpha^2+\beta^2)e^{2\gamma\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha+i\beta}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha-i\beta}{n}\right)e^{-\frac{2\alpha}{n}} \tag{3.3}$$

Considerando $\beta = 0$ en (3.3), tenemos que:

$$\frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^2} = \alpha^2e^{2\alpha\gamma}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2e^{-\frac{2\alpha}{n}},$$

entonces

$$e^{2\alpha\gamma}\prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2\alpha}{n}} = \frac{1}{\alpha^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^2[\Gamma(\alpha)]^2} \tag{3.4}$$

reemplazando (3.4) en (3.3), nos da que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(\overline{z})} &= \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^2}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\alpha+i\beta}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha-i\beta}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2}\\
&= \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^2}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{\alpha}{n})^2+(\frac{\beta}{n})^2}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2}\\
&= \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^2}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right),
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(\overline{z})} = \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^2}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right)$$

y como sabemos que $|\Gamma(\alpha+i\beta)| = |\Gamma(\alpha-i\beta)|$, tenemos

$$|\Gamma(\alpha+i\beta)|^2 = |\Gamma(\alpha)|^2\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right)^{-1} \text{ y, entonces}$$

$$|\Gamma(\alpha+i\beta)| = |\Gamma(\alpha)|\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

como señalado. □

5. Para $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$ y $\beta \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$|\Gamma(\alpha+i\beta)| \leqslant |\Gamma(\alpha)|.$$

Solución. Del ejercicio anterior tenemos que:

$$\Gamma(\alpha+i\beta)| = |\Gamma(\alpha)|\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

y como:

$$1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\geqslant 1$$
$$\left(1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant 1$$
$$\left(1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\leqslant 1$$
$$|\Gamma(\alpha)|\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\leqslant|\Gamma(\alpha)|,$$

por lo tanto,

$$|\Gamma(\alpha+i\beta)|\leqslant|\Gamma(\alpha)|.$$

□

6. Para $y\in\mathbb{R}$, se cumple:

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2=\frac{\pi}{\cosh(\pi y)}.$$

Solución. La fórmula de reflexión de Euler nos señala que $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Usando, en esta expresión, el cambio de variable $z=\frac{1}{2}+iy$, tenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\Gamma(\frac{1}{2}-iy)&=\frac{\pi}{\sin\left(\pi(\frac{1}{2}+iy)\right)}\\&=\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2}+i\pi y)}\\&=\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})\cos(iy\pi)+\cos(\frac{\pi}{2})\sin(iy\pi)}\\&=\frac{\pi}{\cos(iy\pi)};\end{aligned}\tag{3.5}$$

y como $\cos(iy\pi)=\dfrac{e^{i(iy\pi)}+e^{-i(iy\pi)}}{2}=\dfrac{e^{y\pi}+e^{-y\pi}}{2}=\cosh(y\pi)$, por lo que

reemplazando en (3.5), nos da que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\Gamma(\frac{1}{2}-iy) = \frac{\pi}{\cosh(y\pi)},$$

por lo tanto,

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}.$$

□

7. Para $y \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}+iy\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-iy\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\cosh(\pi y)+i\sinh(\pi y)}.$$

Solución. Sea $z = -\frac{3}{4}+iy$, entonces $\Gamma\left(\frac{1}{4}+iy\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-iy\right) = \Gamma(z+1)\Gamma(-z)$. Ahora sea $w = z+1$, entonces $\Gamma(z+1)\Gamma(-z) = \Gamma(w)\Gamma(1-w)$ y usando la fórmula de reflexión para la función Gamma tenemos que:

$$\begin{aligned}\Gamma(w)\Gamma(1-w) &= \frac{\pi}{\sin(\pi w)}\\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi(\frac{1}{4}+iy))}\\ &= \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{4}+i\pi y)}\\ &= \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{4})\cos(i\pi y)+\cos(\frac{\pi}{4})\sin(i\pi y)}\\ &= \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(i\pi y)+\sin(i\pi y))},\end{aligned}$$

y como $\cos(i\pi y) = \cosh(\pi y)$ y $\sin(i\pi y) = i\sinh(i\pi y)$, entonces:

$$\begin{aligned}\Gamma(w)\Gamma(1-w) &= \frac{2\pi}{\sqrt{2}(\cosh(\pi y)+i\sinh(\pi y))}\\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{2(\cosh(\pi y)+i\sinh(\pi y))}\\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{\cosh(\pi y)+i\sinh(\pi y)},\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}+iy\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-iy\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{\cosh(\pi y)+i\,\sinh(\pi y)}.$$

□

8. Calcule el valor numérico (aproximado) de:
   (a) $\Gamma(i)$.
   (b) $\Gamma(1+i)$.
   (c) $\Gamma(1-i)$.
   (d) $\Gamma(5+3i)$.
   (e) $\Gamma(5-3i)$.
   (f) $\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$.
   (g) $\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$.

Solución. (a) Usar la aproximación de la función Gamma, proposición 1.2.32, y evaluar en $\Gamma(i)$, esto es:

$$\Gamma(x)\approx\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\frac{571}{2488320x^4})$$

$$\Gamma(i)\approx\sqrt{2\pi}i^{i-\frac{1}{2}}e^{-i}(1+\frac{1}{12i}+\frac{1}{288i^2}-\frac{139}{51840i^3}-\frac{571}{2488320i^4}).$$

Acá, podemos escribir la expresión $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$, entonces $i^{i-\frac{1}{2}}=(e^{i\frac{\pi}{2}})^{i-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{4}}=e^{-\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$ y la expresión $e^{-i}=\cos(1)-i\,\sin(1)$, por lo tanto, la expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}i^{i-\frac{1}{2}}e^{-i}&=\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\cos(1)-i\,\sin(1))\\&\approx-0,110968-0,509124i.\end{aligned}$$

Por otro la dos la expresión:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{12i}+\frac{1}{288i^2}-\frac{139}{51840i^3}-\frac{571}{2488320i^4}\\=1-\frac{1}{12}i-\frac{1}{288}+\frac{139}{51840}i-\frac{571}{2488320}\\\approx 0,996298-0,080652i,\end{aligned}$$

entonces

$$\Gamma(i) \approx (-0,110968 - 0,509124i) \cdot (0,996298 - 0,080652i),$$

por lo tanto,

$$\Gamma(i) \approx -0,1549 - 0,4980i.$$

(b) Aplicar los mismos pasos del ítem a), ítem b) e ítem c).

(c) Aplicar los mismos pasos del ítem a), ítem b) e ítem c).

(d) Aplicar los mismos pasos del ítem a), ítem b) e ítem c).

(e) Aplicar los mismos pasos del ítem a), ítem b) e ítem c).

□

9. Pruebe que:

$$\arg\left(\Gamma(z)\right) = y\Psi(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{x+n} - \arctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right),$$

con $z = x + iy$ y $z \neq 0$.

10. Pruebe que $\Gamma(1 + iy) = iy\Gamma(iy)$.

11. Pruebe que:

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y\sinh(\pi y)}.$$

12. Pruebe que si $\Gamma(x + iy) = u + iv$, entonces $\Gamma(x - iy) = u - iv$.

13. Usando las definiciones de las integrales exponencial, coseno y seno, pruebe que:

$$E_i(ix) = Ci(x) + iSi(x).$$

A Puntos máximos y/o mínimos de la función gamma

En este anexo se muestran métodos para encontrar los puntos de máximos y/o mínimos de la función Gamma.

A.1 Método I

De la función digamma tenemos que

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)},$$

entonces para encontrar sus valores extremos debemos resolver la ecuación:

$$-\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)} = 0;$$

claro que para encontrar las raíces de esta ecuación es un problema complejo. Por ello, consideraremos una aproximación

$$-\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n(n+x)} = 0$$

que es lo mismo que

$$1 + \gamma x - x^2 \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n(n+x)} = 0.$$

La apropiada elección, del índice extremo M, va a depender de la rápida convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)}$. Podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)} = \underbrace{\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+x)}}_{S_p} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)}$$

$$= S_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}$$

con $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+x)} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

Ahora, para cierto intervalo $(a, b) \subset D$ (D dominio de la función Gamma), le impondremos las siguientes condiciones:

1. $b - a < 1$.
2. $x \in [\bar{a}, \bar{b}] \subset (a, b)$.
3. $p = [|x|] + 1$, donde $[|x|]$ indica la parte entera de $|x|$.

Entonces si reescribimos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)} = S_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1},$$

y expandiendo $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} == \dfrac{1}{1 + \frac{x}{n}}$ en serie de Taylor y puesto que $\dfrac{1}{1 + \frac{x}{n}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{n}\right)^k$,

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)} = S_p(x) + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{n}\right)^k =$$
$$= S_p(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+2}} = S_p(x) +$$
$$+ \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - x \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} + x^2 \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^4} -$$
$$- \ldots + (-1)^k x^k \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+2}} + \ldots$$
$$= S_p(x) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^2} \right) - x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^3} \right) +$$
$$+ x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^4} \right) + \ldots (-1)^k x^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+2}} - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^{k+2}} \right) + \ldots;$$

luego usamos la función zeta de Riemann, es decir, $\zeta_p(k) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^k}$ y $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ y tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)} = S_p(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \big(\zeta(k+2) - \zeta_p(k+2)\big)$$

o

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)} = S_p(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k x^{k-2} \big(\zeta(k) - \zeta_p(k)\big),$$

entonces

$$1 + \gamma x - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)} = 1 + \gamma x - x^2 S_p(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k x^k \big(\zeta(k) - \zeta_p(k)\big) = 0; \quad \text{(A.1)}$$

luego, eligiendo un M adecuado, tenemos:

$$1 + \gamma x - x^2 S_p(x) + \sum_{k=2}^{M} (-1)^k x^k \left(\zeta(k) - \zeta_p(k)\right) = 0. \tag{A.2}$$

Debido a que éste algoritmo de optimización depende de la función zeta de Riemann y de la rápida convergencia de ésta, es decir, mientras sea mas grande M más rápida la convergencia de (A.1). Esto implica claramente la minimización de p v/s x, por ello lo importante del valor de p, $p = [|x|] + 1$.

Con estos cálculos tenemos, ahora, que encontrar las raíces de la ecuación (A.2) va a depender del cálculo de los siguientes parámetros:

- El número n_M de cifras significativas (precisión).
- El valor de $M(?) \leqslant n_M$.
- El número de cifra significativas de $\overline{a}$ y $\overline{b}$.

Ejemplo A.1.1. A modo de ejemplo, consideremos el caso en que $x \in (a, b) = (-4, -3)$, entonces según el método tenemos que $p = 4$. La ecuación A.2 nos da:

$$\begin{aligned} 0 =& 1 + \gamma x - x^2 S_4(x) - \sum_{n=1}^{M} (-1)^k x^k (\zeta(k) - \zeta_4(k)) \\ =& 1 + x \left[\gamma - \sum_{n=1}^{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \right] - \sum_{k=2}^{M} (-1)^k x^k \left(\zeta(x) - \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n^4} \right); \end{aligned}$$

Con pocas iteraciones sucesivas, podemos afirmar que el rango de $[\overline{a}, \overline{b}] = [-3,6353; -3,6352]$. Ahora si asignamos $M = n_M = 10(?)$, tenemos que $x \approx -3,6352933664$.

A.2 Método II

Otro método para encontrar los máximos y mínimos de la función Gamma para $x < 0$, es usar la fórmula de recurrencia y reflexión de la función digamma y el método de Newton-Raphson.

Para encontrar los máximos y mínimos de cualquier función, primero se calcula la derivada de esta y luego se iguala a 0, en nuestro caso $\Gamma'(x) = 0$, pero según la definición de la función digamma $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, entonces tenemos que resolver la ecuación $\Psi(x) = 0$.

Primero usaremos la fórmula de reflexión de la función digamma:

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x); \forall x \notin \mathbb{Z}.$$

Sea $x < 0$ tal que $\Psi(x) = 0$, entonces $\Psi(1-x) = \pi \cot(\pi x)$, y como $x < 0$, entonces tenemos que $1 - x > 0$ y si hacemos el cambio de variables $1 - x = 1 + y$, entonces $-x = y$ con $y > 0$ por tanto, tenemos que:

$$\Psi(y+1) = \pi \cot(\pi \cdot -y) = -\pi \cot(\pi y),$$

entonces

$$\Psi(y+1) + \pi \cot(\pi y) = 0 \tag{A.3}$$

y como para $y > 0$, tenemos la aproximación de la función digamma:

$$\Psi(y) \approx \ln(y) - \frac{1}{2y} - \frac{1}{12y^2} + \frac{1}{240y^4};$$

por tanto, usando la fórmula de recurrencia de la función digamma:

$$\Psi(y+1) = \Psi(y) + \frac{1}{y},$$

tenemos:

$$\Psi(y+1) \approx \ln(y) - \frac{1}{2y} - \frac{1}{12y^2} + \frac{1}{240y^4} + \frac{1}{y},$$

esto es:

$$\Psi(y+1) \approx \ln(y) + \frac{1}{2y} - \frac{1}{12y^2} + \frac{1}{240y^4}.$$

Reemplazando en (A.3), observamos que tenemos que resolver la ecuación:

$$\ln(y) + \frac{1}{2y} - \frac{1}{12y^2} + \frac{1}{240y^4} + \pi \cot(\pi y) = 0;$$

y para hacerlo usamos el método de Newton-Raphson con :

$$h(y) = \ln(y) + \frac{1}{2y} - \frac{1}{12y^2} + \frac{1}{240y^4} + \pi \cot(\pi y);$$

para la cual tenemos :

$$h'(y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{6y^3} - \frac{1}{60y^5} - \pi^2 \csc^2(\pi y);$$

como el método de Newton-Raphson, señala que $y_{n+1} = y_n - \dfrac{h'(y_n)}{h(y_n)}$, y como sabemos

que hay un punto de máximo o de mínimo en cada intervalo $x \in]-n, -n+1[$, entonces $y \in]n-1, n[$ para $n \in \mathbb{N}$.

Para el intervalo $]0, 1[$, empezamos con el $y_0 = 0,5$ y nos da que $y \approx 0,5044319425$ y como $-x = y$, entonces $x \approx -0,5044319425$. Para el intervalo $]1, 2[$, empezamos con el $y_0 = 1,5$ y nos da que $y \approx 1,573449476$ entonces $x \approx -1,573449476$. Para el intervalo $]2, 3[$, empezamos con $y_0 = 2,5$ y nos da que $y \approx 2,610713614$ entonces $x \approx -2,610713614$. Y así sucesivamente.

A.3 Método III

Otro método, parecido al método II, se obtiene de usar la fórmula de reflexión de la función digamma, su aproximación y una expresión, ver Magno (s.f.), por medio de la cual Hermite notó de como se comportaban las raíces de Ψ,

$$x_k = -k + O\left(\frac{1}{\ln(x)}\right). \tag{A.4}$$

La fórmula de reflexión de la función digamma establece que:

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x) = \frac{\pi}{\tan(\pi x)}; \forall x \notin \mathbb{Z}$$

de esta expresión tenemos que:

$$\Psi(1-x) = \Psi(x) + \frac{\pi}{\tan(\pi x)},$$

entonces para $x < 0$ tal que $\Psi(x) = 0$, tenemos: $\Psi(1-x) = \dfrac{\pi}{\tan(\pi x)}$, usando el cambio de variable $1 - x = 1 + y$, tenemos que

$$\Psi(y+1) = \frac{\pi}{\tan(-\pi y)} = -\frac{\pi}{\tan(\pi y)};$$

y, de esto, tenemos:

$$\begin{aligned} \tan(\pi y) &= -\frac{\pi}{\Psi(y+1)} \\ \pi y &= \arctan\left(-\frac{\pi}{\Psi(y+1)}\right) \\ y &= -\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi}{\Psi(y+1)}\right) \end{aligned} \tag{A.5}$$

y usando (A.4) en que $x_k \approx -k$, entonces como $-x = y$, tenemos que $y_k \approx k$, entonces $y_k - k \approx 0$ y usando la aproximación de la función digamma, obtenemos:

$$\Psi(y+1) \approx \ln(y) + \frac{1}{2y} - \frac{1}{12y^2} + \frac{1}{240y^4},$$

entonces reemplazando en (A.5), tenemos que:

$$y_k - k \approx= -\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\pi}{\ln(k) + \frac{1}{2k} - \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{240k^4}}\right);$$

por lo tanto,

$$y_k \approx k - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\pi}{\ln(k) + \frac{1}{2k} - \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{240k^4}}\right);$$

y con esto tenemos que:

$$x_k \approx -k + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\pi}{\ln(k) + \frac{1}{2k} - \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{240k^4}}\right)$$

con $k \in \mathbb{N}$.

De estos tres métodos podemos obtener los puntos de máximo (o de mínimo) de la función Gamma, para cada intervalo $]-k, -k+1[$ para $k \geqslant 1$.

x	$\Gamma(x)$
$-0,5044319425$	$-3,5446455403$
$-1,5734494759$	$2,3024072858$
$-2,6107136126$	$-0,8881363587$
$-3,6352914559$	$0,2451275398$
$-4,6532370735$	$-0,0527796396$
$-5,6671621403$	$0,0093245945$
$-6,6784180625$	$-0,0013973966$
$-7,6877882422$	$0,0001818784$
$-8,6957641148$	$-0,0000209253$
-9.7026725251	$0,0000021574$
$\vdots$	$\vdots$

Cuadro A.1: Valores de los puntos mínimos y máximos de la función Gamma para $x < 0$.



Números de Bernoulli

Una manera de encontrar propiedades de la funciones Gamma, digamma, polygamma; es usando los números de Bernoulli, Oyrazo y Mancilla (2006).

Definición B.0.1. Se define la sucesión de números $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de manera inductiva como sigue: $B_0 = 1$ y

$$B_m := -\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}B_k;$$

para cada $m \in \mathbb{N}$.

Nota. Los números B_n reciben el nombre de **números de Bernoulli**, en virtud de que fue Jacob Bernoulli quien los definió y utilizó por primera vez.

Si la definición de B_m, la multiplicamos por $(m+1) = \binom{m+1}{m}$ en ambos lados, tenemos:

$$(m+1)B_m = -\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}B_k,$$

$$\binom{m+1}{m}B_m = \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}B_k = 0,$$

por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0 \qquad \text{para } m \geqslant 1.$$

Si expresamos esta última ecuación para cada $m \in \mathbb{N}$, el resultado es el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2B_1 + 1 &= 0, \\ 3B_2 + 3B_1 + 1 &= 0, \\ 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1 &= 0, \\ 5B_4 + 10B_3 + 10B_2 + 5B_1 + 1 &= 0, \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

y realizando los cálculos para los primeros 12 números de Bernoulli, tenemos:

$$B_1 = -\frac{1}{2}; B_2 = \frac{1}{6}; \qquad B_3 = 0; B_4 = -\frac{1}{30}; \qquad B_5 = 0; B_6 = \frac{1}{42}$$
$$B_7 = 0; B_8 = -\frac{1}{30}; \qquad B_9 = 0; B_{10} = \frac{5}{66}; \qquad B_{11} = 0; B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

Lema B.1. *Supongamos que se expande la función* $\frac{t}{e^t - 1}$ *en serie de potencias alrededor del origen, es decir, que se busca una expresión de la forma:*

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m.$$

Entonces se cumple que $b_m = \frac{B_m}{m!}$, $\forall m \in \mathbb{N}_0$.

Prueba. Sea $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m$; multiplicando con$(e^t - 1)$, en ambos lados, tenemos:

$$t = (e^t - 1) \sum_{k=0}^{\infty} b_m t^m,$$

y como $e^t - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, entonces tenemos:

$$t = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m \right) = \left(t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m \right),$$

y

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m\right).$$

Usando el producto de Cauchy: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ con $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. tenemos:

$$1 = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{[(m-k)+1]!}\right) t^m.$$

Si igualamos los coeficientes en ambos lados tenemos que $b_0 = 1 = \frac{B_0}{0!}$, mientras que para $m \in \mathbb{N}$ nos da:

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{(m+1-k)!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{k! b_k}{k!(m+1-k)!}$$

y multiplicando por $(m+1)!$, nos da

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \frac{(m+1)! k! b_k}{k!(m+1-k)!} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} (k! b_k)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Comparando esto último con la ecuación

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0$$

más la condición inicial $0! b_0 = B_0 = 1$, tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} (k! b_k) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0,$$

por lo tanto,

$$B_k = k! b_k \ \text{ y de aquí } \ b_k = \frac{B_k}{k!}.$$

□

Proposición B.0.1. *$B_{2k+1} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Prueba. Aplicando el lema anterior y tomando en cuenta que $B_1 = -\frac{1}{2}$ tenemos que:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k t^k}{k!} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k,$$

entonces

$$\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k!}t^k,$$

$$\frac{t}{2}\cdot\frac{e^t+1}{e^t-1}=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k!}t^k.$$

Veamos que $\frac{t}{2}\cdot\frac{e^t+1}{e^t-1}$ es una función par:

$$\frac{-t}{2}\cdot\frac{e^{-t}+1}{e^{-t}-1}\cdot\frac{e^t}{e^t}=\frac{-t}{2}\cdot\frac{e^t+1}{1-e^t}=\frac{t}{2}\cdot\frac{e^t+1}{e^t-1},$$

así llegamos a la siguiente relación:

$$1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k!}t^k=\frac{t}{2}\cdot\frac{e^t+1}{e^t-1}=\frac{-t}{2}\cdot\frac{e^{-t}+1}{e^{-t}-1}=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k B_k}{k!}t^k.$$

Si se igualan los coeficientes de t^k en la última expresión, se tiene que $1=1$ y $\frac{B_k}{k!}=\frac{(-1)^k B_k}{k!}$, para $k\geqslant 2$, es decir:

$$B_k=(-1)^k B_k \quad \forall k\geqslant 2.$$

Además si k es un número par, esta última relación no nos entrega ninguna información, pero si k es un número impar tenemos que $B_k=-B_k$, por lo tanto $B_k=0$ si $k\geqslant 2$ y k impar.

□

B.1 Polinomios de Bernoulli

Definición B.1.1. Para cada $m\in\mathbb{N}_0$, definimos el m-ésimo polinomio de Bernoulli, denotado por $B_m(x)$, como:

$$B_m(x))=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B_k x^{m-k}.$$

De esta forma tenemos que:

$$\begin{aligned}
B_0(x) =&1,\\
B_1(x) =&x - \frac{1}{2},\\
B_2(x) =&x^2 - x + \frac{1}{6},\\
B_3(x) =&x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,\\
B_4(x) =&x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},\\
\vdots =&\vdots
\end{aligned}$$

Proposición B.1.1. *1)* $\frac{1}{m+1} B'_{m+1}(x) = B_m(x)$, *para* $\forall m \in \mathbb{N}_0$ *con* $B'_{m+1}(x)$ *derivada del polinomio* $B_{m+1}(x)$.

2) $B_m(0) = B_m(1) = B_m$, $\forall m \in \mathbb{N}_0$; $m \neq 1$.

Prueba. 1) Primero observemos que $\binom{m+1}{k}\frac{m+1-k}{m+1} = \binom{m}{k}$, entonces de la definición de polinomios de Bernoulli, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m+1} B'_{m+1}(x) =&\frac{1}{m+1}\left[\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k} B_k x^{m+1-k}\right)\right] =\\
=&\frac{1}{m+1} \cdot \sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}(m+1-k) B_k x^{m-k} =\\
=&\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}\frac{(m+1-k)}{m+1} B_k x^{m-k} =\\
=&\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} B_k x^{m-k} =\\
=&B_m(x).
\end{aligned}$$

2) Si $m = 0$, entonces el polinomio $B_0(x)$ es el polinomio constante con valor $B_0 = 1$. Ahora bien cuando $m \geqslant 2$, entonces es claro que $B_m(0) = B_m$. Por otra parte, se tiene

que:

$$
\begin{aligned}
B_m(1) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k = \\
&= B_m + m B_{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m}{k} B_k = \\
&= B_m + m B_{m-1} - m \underbrace{\left(-\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m}{k} B_k \right)}_{\text{Parte 1)}} = \\
&= B_m + m B_{m-1} - m B_{m-1} = B_m.
\end{aligned}
$$

En el caso del polinomio $B_1(x)$, se tiene que $B_1(0) = -\frac{1}{2} = B_1$, mientras que $B_1(1) = \frac{1}{2} = -B_1$. Con esto se completa la información acerca de los $B_m(0) = B_m(1)$.

□

Bibliografía

R. L. Adler, A. G. Konheim y M. H. McAndrew (1965). "Topological entropy". *Trans. Amer. Math. Soc.* 114, págs. 309-319. MR: 0175106 (vid. pág. 106).

G. E. Andrews, R. Askey y R. Roy (1999). *Special functions*. Vol. 71. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, págs. xvi+664. MR: 1688958 (vid. págs. 11, 19, 148).

G. B. Arfken y H. J. Weber (2001). *Mathematical methods for physicists*. Fifth. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, págs. xiv+1112. MR: 1810939 (vid. pág. 54).

E. Artin (1964). *The gamma function*. Translated by Michael Butler. Athena Series: Selected Topics in Mathematics. Holt, Rinehart y Winston, New York-Toronto-London, págs. vii+39. MR: 0165148 (vid. págs. 11, 43).

R. E. Attar (2006). *Special Functions and Orthogonal Polynomials*. Lulu Press, USA (vid. pág. 62).

R. J. Baxter (1982). *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, págs. xii+486. MR: 690578.

E. Belanzario (2001). "Método elemental para la evaluación de la función zeta de Riemann en los enteros pares". *Miscelanea Matemática* 33, págs. 31-41 (vid. pág. 153).

B. C. Carlson (1977). *Special functions of applied mathematics*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, págs. xv+335. MR: 0590943 (vid. pág. 11).

B. W. Carroll y D. A. Ostlie (2007). *An Introduction to Modern Astrophysics*. 2ª ed. Pearson Eduction, Inc. (vid. pág. 80).

V. Coendra (2008). "Cúmulos de Galaxias: Propiedades de Galaxias y Subsistemas". Tesis de Doctorado. Tesis doct. Universidad de Córdoba (vid. pág. 80).

P. J. Davis (1959). "Leonhard Euler's integral: A historical profile of the gamma function". *Amer. Math. Monthly* 66, págs. 849-869. MR: 0106810 (vid. págs. 1-3, 58).

J. Dugundji (1966). *Topology*. Allyn y Bacon, Inc., Boston, Mass., págs. xvi+447. MR: 0193606 (vid. pág. 115).

L. Euler (1738). "De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt". *Comm. Acad. Sci. Petropolitanae* 5, págs. 36-57 (vid. pág. 2).

O. J. Farrell y B. Ross (1971). *Solved Problems in Analysis, as applied to Gamma, Beta, Legendre and Bessel Functions*. New York: Dover Publications (vid. pág. 62).

D. J. Fernandez (2008). "Números de Bernoulli: Un estudio sobre su importancia, consecuencias y algunas aplicaciones en la teoría de números". Tesis de Grado. Tesis de mtría. Instituto politécnico nacional Escuela superior de física y matemáticas (vid. pág. 53).

P. H. Fuss (1843). *Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géomètries du XVIII*. Saint-Pétersbourg: Acad. Imperiale des Sci., pág. 713 (vid. pág. 1).

V. Gui nez, R. Labarca y M. Martínez (2004). "Ecuaciones Diferenciales". Texto de Estudio. Facultad de Ciencia. Universidad de Santiago de Chile (vid. pág. 78).

J. Havil (2003). *Gamma*. Exploring Euler's constant, With a foreword by Freeman Dyson. Princeton University Press, Princeton, NJ, págs. xxiv+266. MR: 1968276 (vid. pág. 22).

E. Jahnke, F. Emde y F. Lösch (1960). *Tables of higher functions*. 6th ed. Revised by Friedrich Lösch. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London; B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, págs. xiv+318. MR: 0114317 (vid. pág. 58).

R. Labarca (1991). *Dinámica de aplicaciones del intervalo*. Ed. Universidad Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

— (2011). *La entropía topológica, propiedades generales y algunos cálculos en el caso del shift de Milnor–Thurston*. XXIV Escuela Venezolana de matemáticas EMALCA, Venezuela 2011. EMALCA (vid. págs. 2, 115).

A. M. Legendre (2010). *Exercices De Calcul Intégral Sur Divers Ordres De Transcendantes Et Sur Les Quadratures*. Vol. 1. Nabu Press (vid. pág. 5).

C. Magno (s.f.). "Proprietà e applicazioni in $\mathbb{R}$ della Funzione GAMMA". Published online (vid. pág. 172).

M. L. Mehta (2004). *Random matrices*. Third. Vol. 142. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Elsevier/Academic Press, Amsterdam, págs. xviii+688. MR: 2129906.

E. J. O. Oyrazo y R. A. S. Mancilla (2006). "Aplicaciones de las energías renovables en la región de Magallanes". Tesis de Grado. Tesis de mtría. Universidad de Magallanes (vid. págs. 78, 175).

M. E. Peskin y D. V. Schroeder (1995). *An introduction to quantum field theory*. Edited and with a foreword by David Pines. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, págs. xxii+842. MR: 1402248.

E. Saavedra Gallardo (2012). *Cálculo de Probabilidades*. Colección Ciencia. Editorial USACH (vid. pág. 70).

H. M. Srivastava y J. Choi (2012). *Zeta and q-Zeta functions and associated series and integrals*. Elsevier, Inc., Amsterdam, págs. xvi+657. MR: 3294573.

N. M. Temme (1996). *Special functions*. A Wiley-Interscience Publication. An introduction to the classical functions of mathematical physics. John Wiley & Sons, Inc., New York, págs. xiv+374. MR: 1376370.

Títulos Publicados — 32º Colóquio Brasileiro de Matemática

Emergence of Chaotic Dynamics from Singularities – *Pablo G. Barrientos, Santiago Ibáñez, Alexandre A. Rodrigues e J. Ángel Rodríguez*

Nonlinear Dispersive Equations on Star Graphs – *Jaime Angulo Pava e Márcio Cavalcante de Melo*

Scale Calculus and M-Polyfolds An Introduction – *Joa Weber*

Real and Complex Gaussian Multiplicative Chaos – *Hubert Lacoin*

Rigidez em Grafos de Proteínas – *Carlile Lavor*

Gauge Theory in Higher Dimensions – *Daniel G. Fadel e Henrique N. Sá Earp*

Elementos da Teoria de Aprendizagem de Máquina Supervisionada – *Vladimir Pestov*

Función Gamma: Propriedades Clásicas e Introducción a su Dinâmica – *Pablo Diaz e Rafael Labarca*

Introdução à Criptografia com Curvas Elípticas – *Sally Andria, Rodrigo Gondim e Rodrigo Salomão*

O Teorema dos Quatro Vértices e sua Recíproca – *Mário Jorge Dias Carneiro e Ronaldo Alves Garcia*

Uma Introdução Matemática a Blockchains – *Augusto Teixeira*


impa
Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada


ISBN 978-85-244-0428-3
9 788524 404283